Matemática (M1029) - Teste III - 18/12/2024

Uma resolução possível

Este teste tem a cotação de 7 valores.

Os telemóveis têm de estar desligados. Não serão corrigidas respostas escritas a lápis.

Deverá responder às questões na própria folha e no espaço respectivo. Todas as respostas devem ser bem justificadas a menos que o contrário seja indicado.

---

1. (1 valor) Resolva

$$\frac{2^x - 32}{x^4} > 0.$$

(Indique o raciocínio)

Uma vez que $x^4 \geq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\frac{2^x - 32}{x^4} > 0 \Leftrightarrow 2^x - 32 > 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 2^x > 2^5 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x > 5$$

2. (0.5+0.5+0.5+0.5 valores) Complete, sem justificar,

$\log_3 9 = \boxed{2}$ $\qquad$ $4^{\log_2 \pi} = \boxed{\pi^2}$

$\log_{1/27}(3) = \boxed{-\frac{1}{3}}$ $\qquad$ $\log_2(2^{2\pi}) = \boxed{2\pi}$

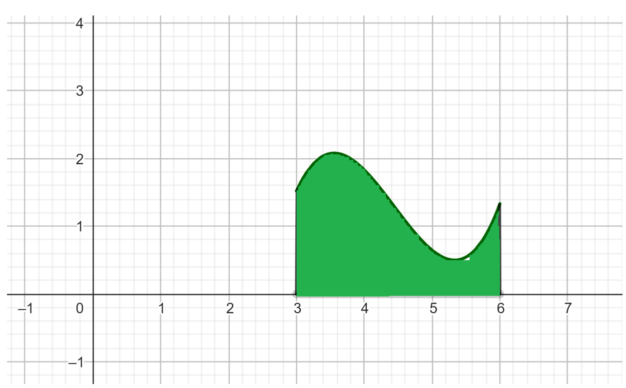
3. (1 valor) Para que pontos do gráfico de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2x + 3$ é que a recta tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à recta de equação $\frac{y}{2} - 3x = 5$?

A recta de equação $\frac{y}{2} - 3x = 5$ é a mesma que a recta de equação $y = 6x + 10$ que tem declive 6. Procuramos assim os pontos do gráfico da função onde o declive da recta tangente ao gráfico seja 6. Isto é, procuramos os pontos $(x, f(x))$ tais que $f'(x) = 6$. Uma vez que

$$f'(x) = 2x + 2$$

$f'(x) = 6$ se e só se $x = 2$. Como $f(2) = 11$, os pontos onde a recta tangente ao gráfico da função dada é paralela à recta é o ponto $(2, 11)$.

4. (1 valor) Sabendo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva e que a área entre o gráfico de f, o eixo dos xx's e $x = 3$ e $x = 6$ tem o valor A indique uma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja área entre o seu gráfico, o eixo dos $xx's$ e $x = 1$ e $x = 4$ tem área A.



Fazendo uma translação do gráfico para a esquerda teremos o pretendido. Podemos assim considerar a função real de variável real g definida por $g(x) = f(x + 2)$

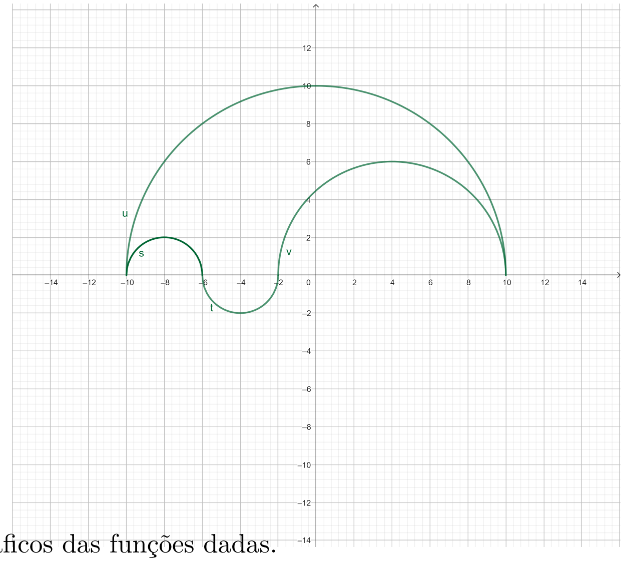
5. Considere as funções e os seus gráficos

$$\begin{array}{rcl} s:[-10,-6] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{4-(x+8)^2} \end{array},$$

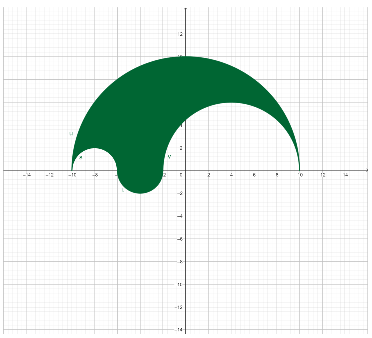
$$\begin{array}{rcl} t:[-6,-2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\sqrt{4-(x+4)^2} \end{array}.$$

$$\begin{array}{rcl} u:[-10,10] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{100-x^2} \end{array},$$

$$\begin{array}{rcl} v:[-2,10] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{36-(x-4)^2} \end{array}.$$



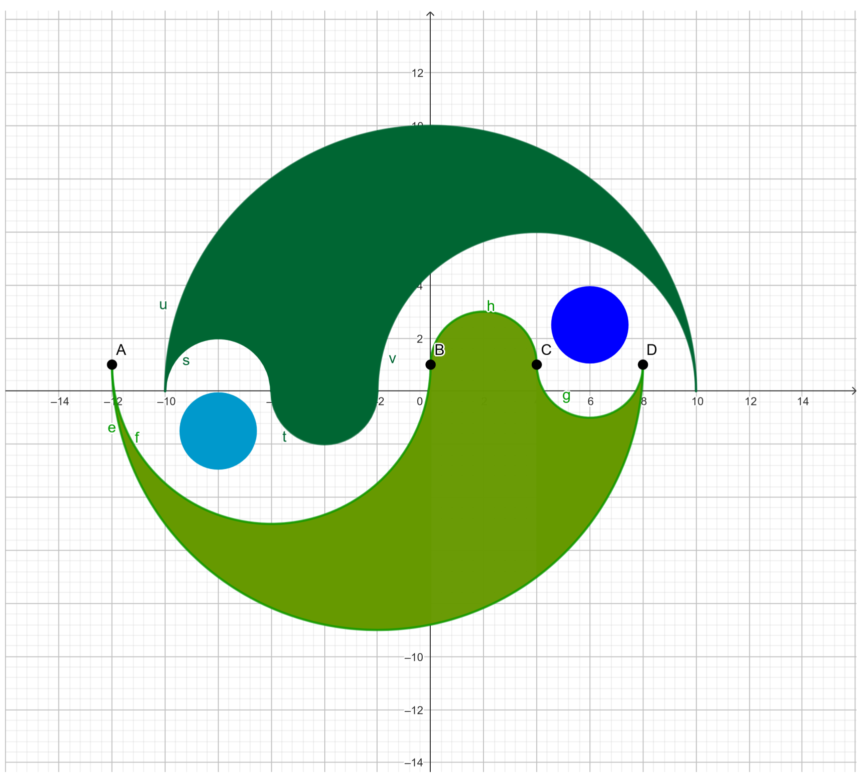
(a) (1 valor) Determine a área a verde limitada pelos gráficos das funções dadas.



Note-se que o conjunto dos pontos da forma $(x, u(x)) = (x, \sqrt{100-x^2})$ satisfazem $x^2+y^2=100$. Como $y=u(x)$ é sempre positivo, temos que o gráfico de u é meia circunferência de raio 10. Analogamente o gráfico de s é meia circunferência de raio 2 bem como o de t. O gráfico de v é meia circunferência de raio 6. Assim a área pedida é a soma e diferença da área de meios circulos, é então

$$\frac{1}{2}\left(\pi(10)^2-\pi(2)^2+\pi(2)^2-\pi(6)^2\right)=32\pi.$$

(b) (1 valor) Determine funções e, f, g, h obtidas por simetria relativamente aos eixos e translação de forma a que o gráfico obtido seja o indicado abaixo onde $A=(-12,1), B=(0,1), C=(4,1), D=(8,1)$ e a área total a verde o dobro do da alinea anterior.



$$\begin{array}{rcc} e:[-12,8] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\sqrt{100-(x+2)^2}+1 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcc} f:[-12,0] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\sqrt{36-(x+6)^2}+1 \end{array}.$$

$$\begin{array}{rcc} g:[4,8] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\sqrt{4-(x-6)^2}+1 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcc} h:[-2,10] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{4-(x-2)^2}+1 \end{array}.$$