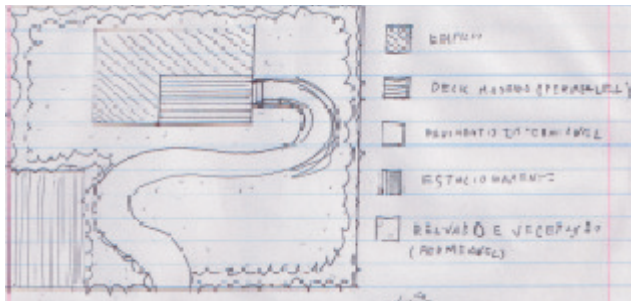


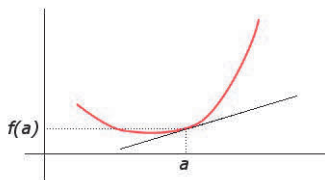
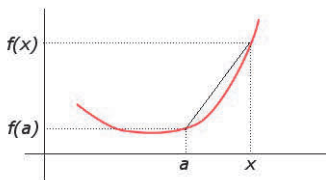
VI - Derivação e integração

Qual a percentagem de área permeável?



(Imagem de Vicente Braga da Cruz (AP - M1029 - 2023-2024))

Derivadas



- ▶ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ é o declive da recta que passa pelos pontos de abcissa a e x do gráfico de f .
- ▶ f é derivável em a se, quando x tende para a , essa recta tender para uma recta (não vertical).
- ▶ Essa recta, se existir, chama-se recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$

Definição de função derivável e recta tangente ao gráfico

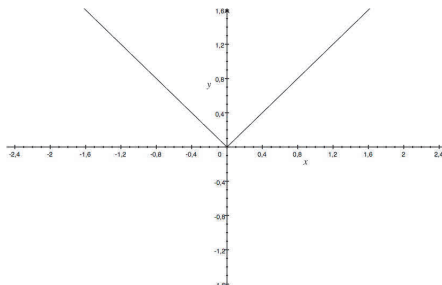
- ▶ Diz-se que f é derivável em a sse existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (e esse limite é finito).
- ▶ Chama-se derivada de f em a a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (notação: $f'(a)$)
- ▶ Diz-se que uma função é derivável sse é derivável em todos os pontos do seu domínio.

Definição de função derivável e recta tangente ao gráfico

- ▶ $f'(a)$ é o declive da recta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$.
- ▶ Uma equação da recta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Derivadas

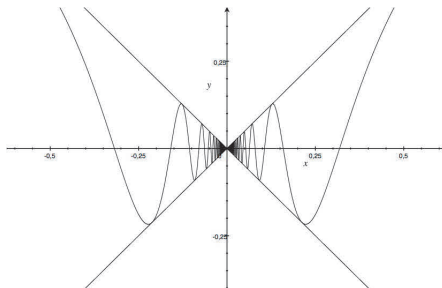
A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ não tem derivada no ponto 0



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

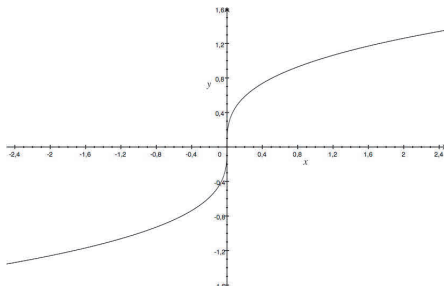
Derivadas

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$
não tem derivada no ponto 0



Derivadas

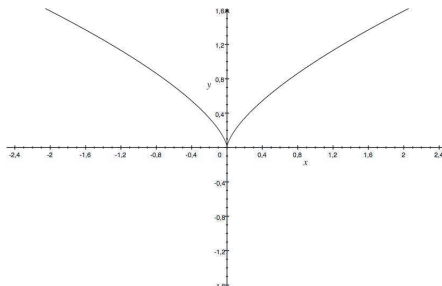
A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ tem derivada $+\infty$ em $x = 0$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty$$

Derivadas

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ não tem derivada em $x = 0$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = -\infty$$

Derivadas: exemplos

Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto x^2$

- ▶ $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 3 = 6$
- ▶ $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} x + a = 2a$
- ▶ Uma equação da recta tangente ao gráfico de f em $(3, 9)$ é $y = 9 + 6(x - 3)$.
- ▶ Uma equação da recta tangente ao gráfico de f em (a, a^2) é $y = a^2 + 2a(x - a)$.

Derivadas

Proposição: Se f é derivável em a , ponto do interior do domínio de f , então f é contínua em a .

Nota: Uma função pode ser contínua num ponto e não ter derivada nesse ponto (ver exemplo anterior).

Derivadas

Proposição: Se f e g são funções deriváveis em a , então $f + g$ e $f \cdot g$ são funções deriváveis em a e

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Se $g(a) \neq 0$ então f/g é derivável em a e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Derivadas: exemplos

- ▶ Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, a função constante $x \mapsto c$ é derivável e a sua derivada é a função nula.
- ▶ Se f é uma função derivável, então, para qualquer $c \in \mathbb{R}$, a função $x \mapsto cf(x)$ é derivável, e $(cf)'(x) = cf'(x)$.
- ▶ Para $a \in \mathbb{R}$, a função $x \mapsto x^a$ é derivável e a sua derivada é $x \mapsto ax^{a-1}$.
- ▶ A função exponencia $x \mapsto e^x$ é derivável e $(e^x)' = e^x$.
- ▶ A função seno é derivável e $\text{sen}' x = \cos x$.
- ▶ A função cosseno é derivável e $\cos' x = -\text{sen } x$.
- ▶ A função tangente é derivável e $\text{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Derivadas

Proposição: Se f é derivável em a e g é derivável em $f(a)$, então $g \circ f$ é derivável em a e $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Derivadas: exemplos

$$f(x) = x^5$$

$$f'(x) = 5x^4$$

$$f(x) = \sqrt[4]{x} (= x^{\frac{1}{4}})$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} (= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}})$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3} (= x^{-3})$$

$$f'(x) = -3x^{-4} (= -\frac{3}{x^4})$$

$$f(x) = 3x^6$$

$$f'(x) = 3 \times 6x^5 = 18x^5$$

$$f(x) = 5x^2 - \frac{7}{x} + 8$$

$$f'(x) = 10x + \frac{7}{x^2}$$

$$f(x) = (3x + 5)(2x + 1)$$

$$f'(x) = 3(2x + 1) + 2(3x + 5)$$

$$f(x) = \frac{2x+3}{5x-7}$$

$$f'(x) = \frac{2(5x-7)-5(2x+3)}{(5x-7)^2}$$

$$f(x) = x^2 \sin x$$

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 e^x - 2x e^x}{x^4} = e^x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)$$

$$f(x) = e^x \sqrt{x} \cos x$$

$$f'(x) = e^x \sqrt{x} \cos x + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} \cos x - e^x \sqrt{x} \sin x$$

$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \log x}{x} = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x} \log x}{2x^2}$$

Derivadas: exemplos

- ▶ $h(x) = (x + 3)^5$; $h = g \circ f$, onde $g(x) = x^5$ e $f(x) = x + 3$.
 $h'(x) = 5(x + 3)^4$
- ▶ $h(x) = \cos(2x^2 + 3x)$; $h = g \circ f$, onde $g(x) = \cos x$ e $f(x) = 2x^2 + 3x$.
 $h'(x) = -(4x + 3) \sin(2x^2 + 3x)$
- ▶ $h(x) = e^{\sqrt{x}}$; $h = g \circ f$, onde $g(x) = e^x$ e $f(x) = \sqrt{x}$.
 $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$
- ▶ $h(x) = \log(x^2 \sin x)$; $h = g \circ f$, onde $g(x) = \log x$ e $f(x) = x^2 \sin x$.
 $h'(x) = \frac{2x \sin x + x^2 \cos x}{x^2 \sin x}$
- ▶ $h(x) = \sin^3 x$; $h = g \circ f$, onde $g(x) = x^3$ e $f(x) = \sin x$.
 $h'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$

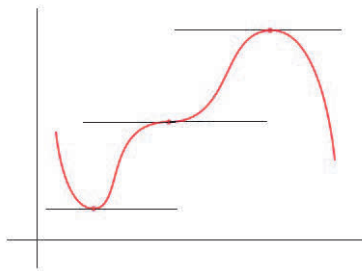
Derivadas: exemplos

Seja $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Determinar os pontos onde as rectas
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$
tangentes ao gráfico de f são paralelas à recta de equação $4x + y = 7$ e determinar equações dessas rectas tangentes.

- ▶ O declive da recta dada é -4 .
- ▶ Duas rectas são paralelas sse têm o mesmo declive.
- ▶ $f'(a) = -4 \Leftrightarrow -\frac{1}{a^2} = -4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ ou $a = -\frac{1}{2}$
- ▶ Então os pontos onde as rectas tangentes ao gráfico de f são paralelas à recta de equação $4x + y = 7$ são os pontos de abscissa $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, isto é, $(\frac{1}{2}, 2)$ e $(-\frac{1}{2}, -2)$.
- ▶ Equações das rectas tangentes nesses pontos são $y = 2 - 4(x - \frac{1}{2})$ e $y = -2 - 4(x + \frac{1}{2})$.

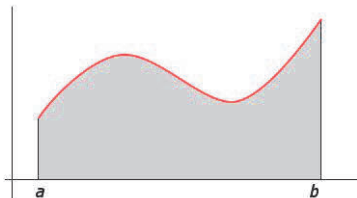
Derivadas: resultados importantes

- ▶ Se $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ tem um máximo ou um mínimo local em x_0 e f é derivável em x_0 , então $f'(x_0) = 0$.
- ▶ **Mas:** pode acontecer $f'(x_0) = 0$ sem que f tenha um máximo nem um mínimo local em x_0 .



O integral definido. Objectivo

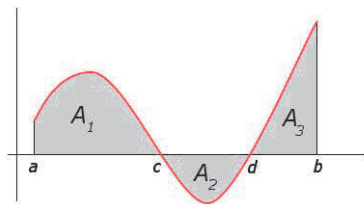
- ▶ Objectivo: definir e calcular a área da região limitada pelo gráfico de uma função limitada e continua num intervalo, como na figura.



- ▶ Partimos da área de um rectângulo e tentamos aproximar aquela região por rectângulos.
- ▶ Começamos pelo caso em que f é positiva.
- ▶ Notação: $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$

Caso em que a função não é positiva

- Se f não é sempre positiva:

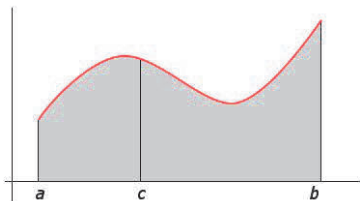


- $\int_a^b f(x)dx$ já não corresponde à área limitada pelo gráfico de f
- No caso da figura, $A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^c f - \int_c^d f + \int_d^b f$.

Integrais definidos: propriedades

Seja f uma função integrável em $[a, b]$.

- ▶ f é integrável em qualquer intervalo fechado contido em $[a, b]$.
- ▶ Para qualquer $c \in [a, b]$, tem-se $\int_c^c f(x)dx = 0$
- ▶ Para qualquer $c \in [a, b]$, tem-se
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



- ▶ Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, tem-se $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$.

Integrais definidos: propriedades

Sejam f, g funções integráveis em $[a, b]$.

$$\blacktriangleright \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

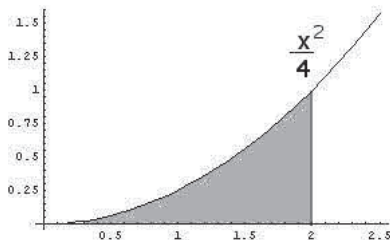
Teorema Fundamental do Cálculo

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $F' = f$, então

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Exemplo

Cálculo da área a cinzento (A)

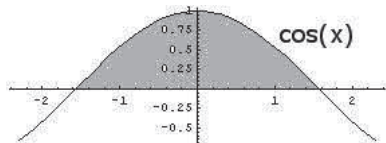


Uma vez que $(\frac{x^3}{12})' = \frac{x^2}{4}$,

$$A = \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{12} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{12} - 0 = \frac{2}{3}$$

Exemplo

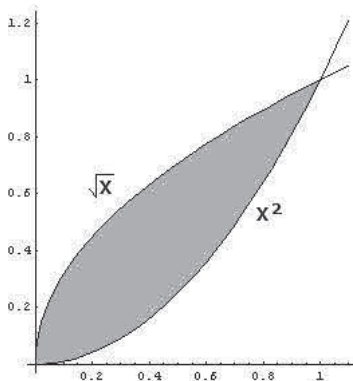
Cálculo da área a cinzento (A)



$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_{x=-\pi/2}^{x=\pi/2} = 2$$

Exemplo

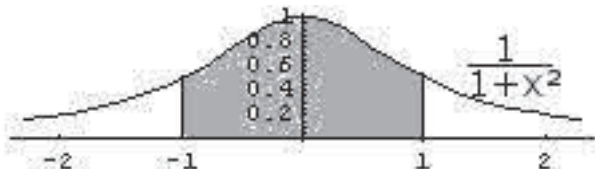
Cálculo da área a cinzento (A)



$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \sqrt{x} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exemplo

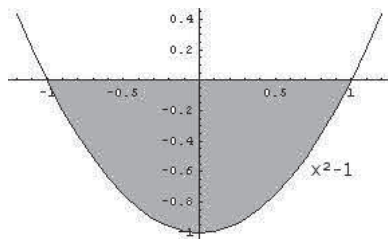
Cálculo da área a cinzento (A)



$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctg x]_{x=-1}^{x=1} = \arctg 1 - \arctg(-1) \\ &= \pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2 \end{aligned}$$

Exemplo

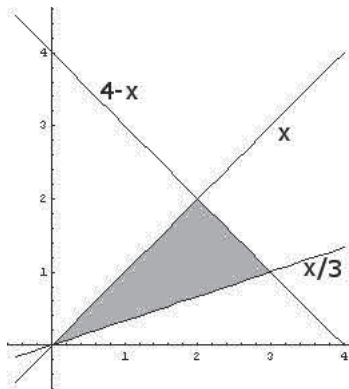
Cálculo da área a cinzento (A)



$$\begin{aligned} A &= - \int_{-1}^1 x^2 - 1 \, dx = - \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{x=-1}^{x=1} = - \left(\frac{1}{3} - 1 - \left(-\frac{1}{3} - (-1) \right) \right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Exemplo

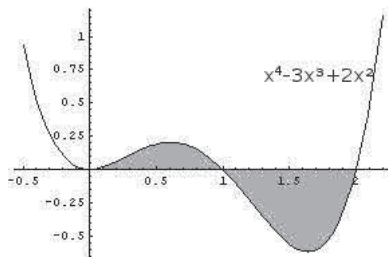
Cálculo da área a cinzento (A)



$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 x \, dx - \int_0^2 \frac{x}{3} \, dx + \int_2^3 4 - x \, dx - \int_2^3 \frac{x}{3} \, dx \\ &= \int_0^2 x - \frac{x}{3} \, dx + \int_2^3 4 - x - \frac{x}{3} \, dx = \int_0^2 \frac{2x}{3} \, dx + \int_2^3 4 - \frac{4x}{3} \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{3} \right]_{x=0}^{x=2} + \left[4x - \frac{2x^2}{3} \right]_{x=2}^{x=3} = 2 \end{aligned}$$

Exemplo

Cálculo da área a cinzento (A)



$$\text{Como } \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right)' = x^4 - 3x^3 + 2x^2 \text{ e}$$

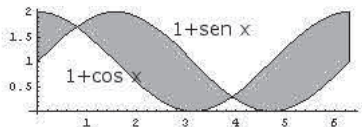
$$\left(\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right)' = x^4 - 3x^3 + 2x^2$$

$$A = \int_0^1 (x^4 - 3x^3 + 2x^2) dx - \int_1^2 (x^4 - 3x^3 + 2x^2) dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{2}$$

Exemplo

Cálculo da área a cinzento (A)



$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} (1 + \cos x) dx - \int_0^{\pi/4} (1 + \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (1 + \sin x) dx - \\ &\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (1 + \cos x) dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (1 + \cos x) dx - \int_{5\pi/4}^{2\pi} (1 + \sin x) dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x) dx \\ &= [\sin x + \cos x]_{x=0}^{x=\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4} + [\sin x + \cos x]_{5\pi/4}^{2\pi} \\ &= \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$