

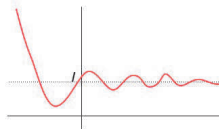
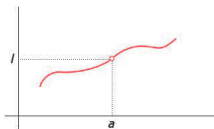
V - Continuidade e derivadas de funções reais de uma variável real

Funções Contínuas

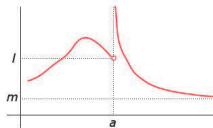
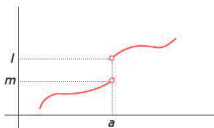
- ▶ Diz-se que uma função f é **contínua num ponto a do seu domínio** se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- ▶ Diz-se que uma função f é **contínua** se f é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Funções Contínuas

Em termos gráficos, f é contínua num ponto a do seu domínio se o gráfico de f não tem uma quebra no ponto $(a, f(a))$, isto é, se for possível desenhar o gráfico por esse ponto sem levantar a caneta do papel.



funções contínuas



funções descontínuas

Funções Contínuas

Em particular, são contínuas as seguintes funções:

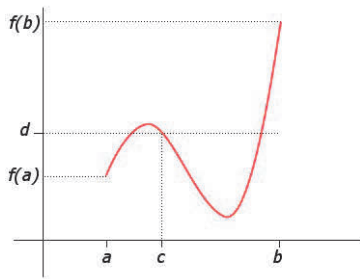
- ▶ funções polinômias:

$$\begin{array}{ccc} p : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array},$$

- ▶ funções racionais $f = \frac{p}{q}$, onde p e q são funções polinômias;
- ▶ funções trigonométricas: sen, cos, tg, cotg, sec, cosec e suas inversas arcsen, arccos, arctg;
- ▶ funções exponenciais e logarítmicas;
- ▶ soma, diferença, produto, quociente, potência, raiz, composta das funções anteriores.

Funções contínuas: Teorema dos valores intermédios

Teorema dos valores intermédios: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e d é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.



Corolário: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que toma valores positivos e negativos em $[a, b]$ então existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

As raízes de polinómios e o teorema dos valores intermédios - método da bisseção

Um polinómio de grau n tem no máximo n raízes. Por exemplo, uma equação do 2º grau tem no máximo duas raízes, isto é, tem duas raízes ou tem apenas uma raiz ou não tem raízes.

Para procurar as raízes de um polinómio p podemos utilizar o corolário do teorema dos valores intermédios da seguinte forma:

Procuramos $a < b$ tais que $p(a)p(b) < 0$, consideramos o ponto médio do intervalo $[a, b]$, $c = \frac{a+b}{2}$ e vamos verificar em qual dos intervalos $[a, c]$ ou $[c, b]$ podemos garantir a existência de uma raiz, verificando se $p(a)p(c) < 0$ ou $p(c)p(b) < 0$. Se $p(a)p(c) < 0$, existe pelo menos uma raiz no intervalo $]a, c[$, se $p(c)p(b) < 0$, existe pelo menos uma raiz no intervalo $]c, b[$. O procedimento é repetido para o subintervalo correspondente à raiz até que a amplitude do intervalo seja menor ou igual ao dobro do erro admitido.

Método da bisseção - exemplo

Consideremos o polinómio $p(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 - 12x + 4$.

Vamos procurar um valor aproximado de uma raiz de p com erro menor a $0,1 = 10^{-1}$

- ▶ Observemos que $p(0) = 4 > 0$ e $p(1) = -2 < 0$.
- ▶ O ponto médio do intervalo $[0, 1]$ é $\frac{1}{2}$.
- ▶ $p(\frac{1}{2}) = \frac{15}{16}$, logo $p(\frac{1}{2})p(1) < 0$.
- ▶ O ponto médio do intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ é $\frac{3}{4}$.
- ▶ $p(\frac{3}{4}) = -\frac{155}{256}$, logo $p(\frac{1}{2})p(\frac{3}{4}) < 0$.
- ▶ O ponto médio do intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ é $\frac{5}{8}$.
- ▶ $p(\frac{5}{8}) = \frac{649}{4096}$, logo $p(\frac{5}{8})p(\frac{3}{4}) < 0$.
- ▶ O ponto médio do intervalo $[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]$ é $\frac{11}{16}$.
- ▶ Como a amplitude do intervalo $[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]$ é $\frac{1}{8} < 2 \times 0,1$, um valor aproximado de uma das raízes do polinómio com erro inferior a $0,1$ é $\frac{11}{16}$.