Semanas 9: Funções.

Nota: quando não explicitamente indicado, entende-se aqui que o domínio de uma função real de variável real é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual a expressão dada faz sentido.

1. Considere a função f que a cada x faz corresponder $x^2 + 1$.
   (a) Determine $f(3)$ e $f(0)$.
   (b) Determine o domínio e a imagem de f.

2. Considere a função g que a cada x faz corresponder $\sqrt{x} + 3$.
   (a) Determine $g(4)$ e $g(9)$.
   (b) Determine o domínio e a imagem de g.

3. Determine o domínio e analise, quando aplicável, a paridade das funções f, g, h, s, t e v cujo termo geral é dado respetivamente por:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 1}$; (d) $i(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$; (g) $k(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$;

   (b) $g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{2x-1}}$; (e) $j(x) = \sqrt{9 - x^2}$; (h) $m(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9}$;

   (c) $h(x) = x^2$; (f) $l(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$; (i) $n(x) = \sqrt{x+1} - \dfrac{1}{x}$.

4. Indique o valor de cada uma das seguintes funções nos pontos indicados:
   (a) f tal que $f(x) = x^2 + 2x$ nos pontos $2, -2$ e 4;
   (b) g tal que $g(x) = x^3 - 4x^2$ nos pontos $0, 1$ e -1;
   (c) h tal que $h(x) = 2|x - 1|$ nos pontos $-2, 0, 2, 1$ e -1;
   (d) i tal que $i(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x < 0 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ nos pontos $2, -2$ e 0;
   (e) j tal que $j(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ (x-2)^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ nos pontos $-3, 0, 1$ e 3.

5. Esboce o gráfico das seguintes funções e, em cada caso, diga se a função é injetiva e/ou sobrejetiva:

   (a) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x+5 \end{array}$; (b) $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$; (c) $\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$.

   (d) $\begin{array}{rcl} j : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ (e) $\begin{array}{rcl} k : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4 - x^2 \end{array}$ (f) $\begin{array}{rcl} l : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

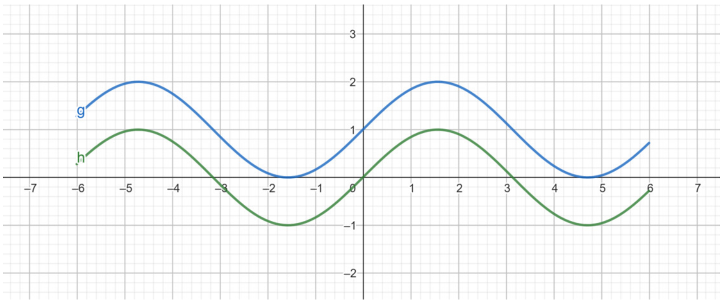
   (g) $\begin{array}{rcl} m : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$ (h) $\begin{array}{rcl} n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+4)^2 \end{array}$ (i) $\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3+1 \end{array}$

   (j) $\begin{array}{rcl} q : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x^2 \end{array}$ (k) $\begin{array}{rcl} r : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-2)^2 \end{array}$ (l) $\begin{array}{rcl} s : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3-8 \end{array}$

6. Esboce o gráfico das funções cujo termo geral é dado, indicando o domínio e se a função é injetiva e/ou sobrejetiva:
   (a) $f(x) = \sqrt{x}$; (b) $g(g) = \sqrt{x-3}$; (c) $h(x) = \sqrt{x} + 4$;
   (d) $i(x) = \sqrt{x-3} + 4$; (e) $j(x) = 3 - \sqrt{x+1}$; (f) $\sqrt{4 - x^2}$.

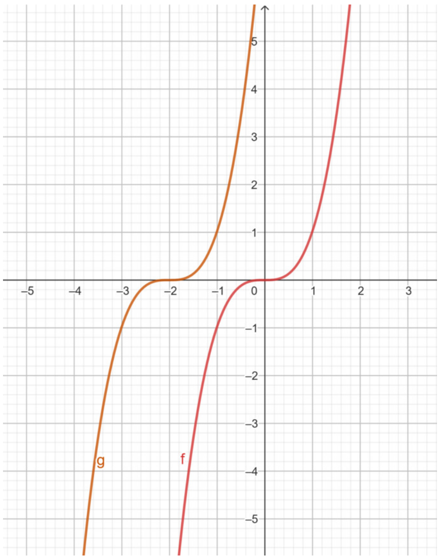
7. Esboce o gráfico das funções f e de g definidas, respetivamente, por $f(x) = |x|$ e $g(x) = |x - 4|$.

8. Sabendo que a função $h : [-6, 6] \to \mathbb{R}$ tem o gráfico indicado abaixi



descreva a função g em usando a função h.

9. Sabendo que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem o gráfico indicado abaixo



descreva a função g usando a função f.

10. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

    (a) Caracterize as funções $f+g, f-g, fg, f/g$ e indique os seus domínios.

    (b) Indique $(f+g)(9), (f-g)(9), (fg)(9), f/g(9)$.

    (c) Caracterize $f \circ g$ e $g \circ f$.

    (d) Indique $f \circ g(9)$ e $g \circ f(9)$.

11. Se $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ e $\begin{array}{rccc} g: &]-\infty, 2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{2-x} \end{array}$,

    descreva as seguintes funções indicando o seu domínio:

    (a) $f \circ g$; (b) $g \circ f$; (c) $f \circ f$; (d) $g \circ g$.

12. Considere as funções f e g e determine $f \circ g$, $f \circ f$ e $g \circ f$ indicando os seus domńios:

    (a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x-4}$;

    (b) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 1$;

    (c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$;

    (d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = x - 1$.

13. Caso exista, encontre as funções inversas de cada uma das funções dadas e esboce os gráficos das funções f, g e h:

    (a) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x+5 \end{array}$; (b) $\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3-1}{3} \end{array}$; (c) $\begin{array}{rcl} h:[2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x-2} \end{array}$;

14. Considere a função g definida em $[0,\pi]$ por $g(x) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2x)$.
    (a) Determine os zeros da função g.
    (b) Mostre que, para qualquer $x \in]0, \pi/2[$, $g(x)$ é a área de um triângulo $\triangle ABC$, em que x é a amplitude do ângulo $\sphericalangle BCA$, $|BC| = 2$, $\overline{B}H$ é a altura relativa ao vertice B e $|AH| = 1$.

15. Considere f e g as funções reais de variável real cujo termo geral é $f(x) = 9^x$ e $g(x) = (1/9)^x$.
    (a) Determine:
    $f(0)$; $f(1/2)$; $f(-1/2)$; $f(2)$; $f(-1)$; $f(-2)$.
    (b) Determine:
    $g(0)$; $g(1/2)$; $g(-1/2)$; $g(2)$; $g(-1)$; $g(-2)$.
    (c) Esboce os gráficos de f e de g.
    (d) Determine o conjunto solução das seguintes inequações:
    i) $9^x \cdot 81 - 9 > 0$; ii) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 0$.

16. Determine o domínio das funções f, g, h e i cuja expressão é dada por:

    $f(x) = 2 + \log_5 x$; $g(x) = \log_{10}(x-3)$; $h(x) = |\log_e x|$; $i(x) = \log_e |x|$.

17. Determine o domínio das funções cujo termo geral é dado e, sempre que possível, a sua inversa:

    (a) $f(x) = \log_{10}(x+3)$; (b) $g(x) = \log_3(x^2-1)$; (c) $h(x) = \log_e(x-x^2)$.

18. Resolva as seguintes equações:

    (a) $e^{3-2x} = 4$; (b) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$; (c) $3xe^x + x^2e^x = 0$; (d) $\log_2(25-x) = 3$;

    (e) $4 + 3\log_e(2x) = 16$; (f) $4e^{\log_e x} = x^3$; (g) $\log_3(x^2-1) = 0$; (h) $\log_3(x^2-1) = 1$.

19. Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes inequações:

    (a) $e^{3x} < 3$; (b) $x\log_2(2x-1) < 0$; (c) $2e^x < 3$; (d) $x\log_2(2x+1) < 3x$.

Funções contínuas

20. Considere a função

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le 1 \\ 2x+1 & \text{se } x > 1 \end{cases} \end{array}$$

    (a) Esboce o gráfico de f.
    (b) Diga se f é contínua.

21. (a) Mostre que a função $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x + 3$ tem um zero entre -2 e -1.
    (b) Encontre um valor aproximado de uma raiz do polinómio $x^3 - x + 3$ com erro inferior a 10^{-2}.

22. (a) Mostre que a função $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$ tem um zero entre -5 e -4.
    (b) Encontre um valor aproximado de uma raiz do polinómio $x^5 + 5x^4 + 2x + 1$ com erro inferior a 10^{-1}.

23. Mostre que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = x - 1$.