

IV - Funções

Conjuntos de números reais

- O conjunto dos números naturais representa-se por $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Temos ainda

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- O conjunto dos números inteiros representa-se por $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Temos ainda

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots -3, -2, -1\}.$$

$$\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

$$\mathbb{Z}_0^- = \{\dots -3, -2, -1, 0\}.$$

Conjuntos de números reais

- ▶ O conjunto dos números racionais representa-se por $\mathbb{Q}$ e pode ser caracterizado de diferentes maneiras:
 - ▶ $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}$.
 - ▶ $\mathbb{Q} = \{ \text{dígitas finitas ou infinitas periódicas} \}$.
 - ▶ $\mathbb{Q} = \{x_0 \text{ tal que } x_0 \text{ é solução de uma equação algébrica do } 1^\circ \text{ grau} \}$.

Temos ainda

$$\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}.$$

$$\mathbb{Q}^- = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}.$$

$$\mathbb{Q}_0^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}.$$

$$\mathbb{Q}_0^- = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 0\}.$$

Conjuntos de números reais

- ▶ O conjunto dos números irracionais representa-se por $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e pode ser caracterizado de diferentes maneiras:
 - ▶ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{ \text{dízimas infinitas não periódicas} \}.$
 - ▶ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x_0 \text{ tal que } x_0 \text{ é solução de uma equação algébrica de grau maior que 1 ou não é solução de qualquer equação algébrica} \}.$

Temos ainda

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x > 0\}.$$

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < 0\}.$$

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x \geq 0\}.$$

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}_0^- = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x \leq 0\}.$$

Conjuntos de números reais

- ▶ O conjunto dos números reais representa-se por $\mathbb{R}$ e é formado pelos números racionais e pelos números irracionais.
 - ▶ Os números x_0 tais que x_0 é solução de uma equação algébrica de 1º grau ou de grau superior chamam-se **números algébricos**. Por exemplo, $\sqrt[5]{3}$ é um número algébrico pois é solução da equação $x^5 - 3 = 0$.
 - ▶ Os números x_0 que não é solução de qualquer equação algébrica chamam-se **transcendentes**. Por exemplo, mostra-se que π é um número transcendente.

Temos ainda

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}.$$

$$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

$$\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

Conjuntos de números reais

- ▶ Chama-se **intervalo**, e representa-se por I , um conjunto de números reais tal que se $a < b$ pertencem a I e $a < c < b$ então o número c também pertence a I .
- ▶ Os intervalos podem ser dos seguintes tipos:
 - ▶ intervalo limitado e fechado: $[x_0, x_1] = \{x \in \mathbb{R} : x_0 \leq x \leq x_1\}$
 - ▶ intervalo limitado e aberto: $]x_0, x_1[= \{x \in \mathbb{R} : x_0 < x < x_1\}$
 - ▶ intervalo limitado, fechado à esquerda e aberto à direita: $[x_0, x_1[= \{x \in \mathbb{R} : x_0 \leq x < x_1\}$
 - ▶ intervalo limitado, aberto à esquerda e fechado à direita: $]x_0, x_1] = \{x \in \mathbb{R} : x_0 < x \leq x_1\}$
 - ▶ intervalo aberto e ilimitado à esquerda: $] - \infty, x_1[= \{x \in \mathbb{R} : x < x_1\}$
 - ▶ intervalo fechado e ilimitado à esquerda: $] - \infty, x_1] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq x_1\}$
 - ▶ intervalo ilimitado à direita e aberto: $]x_0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x_0 < x\};$
 - ▶ intervalo ilimitado à direita e fechado: $[x_0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x_0 \leq x\}$
 - ▶ $\mathbb{R} =] - \infty, +\infty[$

Funções reais de variável real

Uma função f diz-se uma **função real** se as imagens de f são números reais. Uma função f diz-se **de variável real** se os objetos que f transforma são números reais. Nesta unidade curricular vamos apenas considerar funções reais de variável real, ou seja, funções $f: A \longrightarrow B$ onde $A, B \subset \mathbb{R}$.

- ▶ Se $f: A \longrightarrow B$ onde $A, B \subset \mathbb{R}$, A chama-se **o domínio de f** e representa-se por D_f e B chama-se **o conjunto de chegada de f** .
- ▶ Frequentemente uma função real é dada apenas através de uma expressão; nesse caso considera-se que o domínio é o maior conjunto onde a expressão faça sentido.
- ▶ Chama-se imagem de f ao conjunto $\text{Im } f = \{f(x), x \in A\} = \{y \in B: \text{existe } x \in A : f(x) = y\}$.
- ▶ Dados $f: A \longrightarrow B$ e $S \subset A$, chama-se restrição de f a S , e representa-se por $f|_S$, à função $S \longrightarrow B$.
$$x \mapsto f(x)$$

Funções reais de variável real - exemplos

- ▶ Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, então $D_f = \mathbb{R}$, o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$ e $Im_f = \mathbb{R}_0^+$.
$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & x^2 \end{array}$$
- ▶ Se $g(x) = \sqrt{x-1}$ então $D_g = [1, +\infty[$ e $Im_g = \mathbb{R}_0^+$.
- ▶ $\text{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h(x) = \text{sen}_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ então,
$$\begin{array}{ccc} h : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \text{sen } x \end{array}$$

Funções injetivas e funções sobrejetivas

Consideremos a função $f: A \longrightarrow B$ onde $A, B \subset \mathbb{R}$.

- ▶ Diz-se que f é **injetiva** se elementos distintos de A têm imagens diferentes, isto é, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
- ▶ Diz-se que f é **sobrejetiva** se $\text{Im } f = B$, isto é, qualquer elemento do conjunto de chegada é imagem de pelo menos um elemento de A .
- ▶ Diz-se que f é **bijetiva** se é sobrejetiva e injetiva.

Funções injetivas e funções sobrejetivas - exemplos

► $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é injetiva pois, por exemplo,
$$x \mapsto x^2$$

$f(2) = f(-2)$, e não é sobrejetiva pois, por exemplo, -1 não é imagem de qualquer número.

► Mas $f|_{\mathbb{R}_0^+} : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é injetiva embora não seja
$$x \mapsto x^2$$

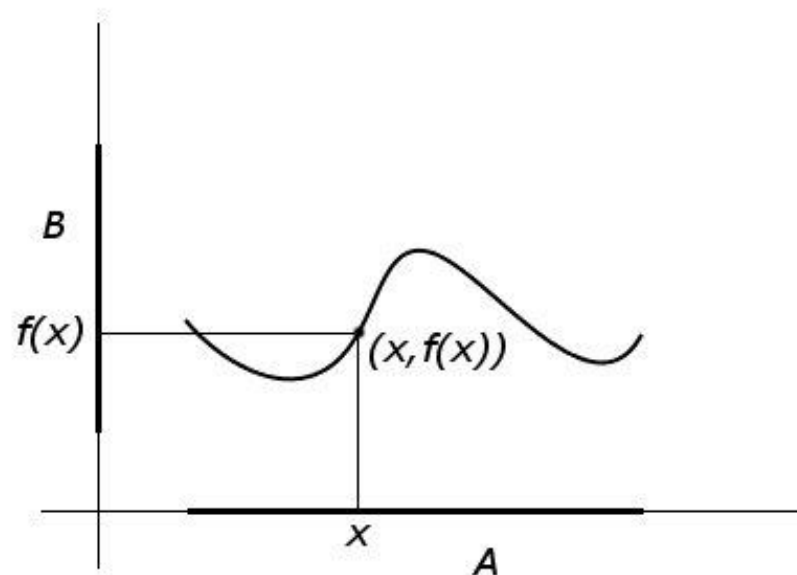
sobrejetiva e $j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ é sobrejetiva, embora não seja
$$x \mapsto x^2$$

injetiva.

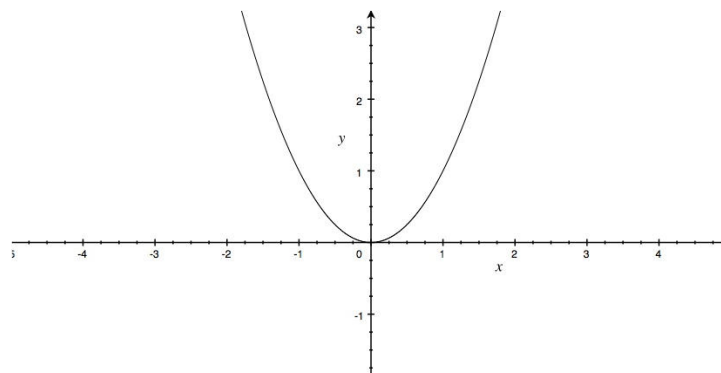
► $g(x) = \sqrt{x-1}$ e $h(x) = \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ são funções injetivas.

Funções - gráfico

O gráfico de $f : A \longrightarrow B$ é o conjunto $\{(x, f(x)), x \in A\}$.

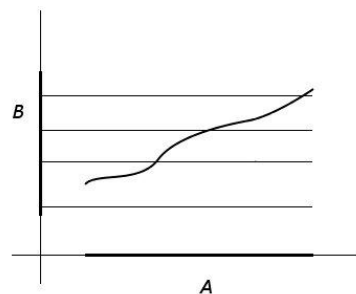


Por exemplo, o gráfico de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.
$$x \mapsto x^2$$

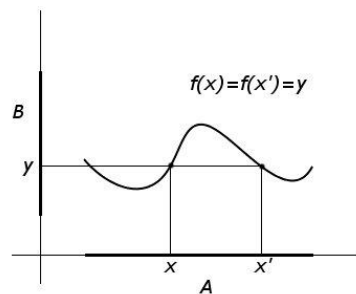


Função injetiva - gráfico

- ▶ f é injetiva se, para qualquer valor de B , a reta horizontal com essa ordenada intersesta o gráfico de f no máximo num ponto (pode não intersestar em qualquer ponto).
- ▶ Função injetiva

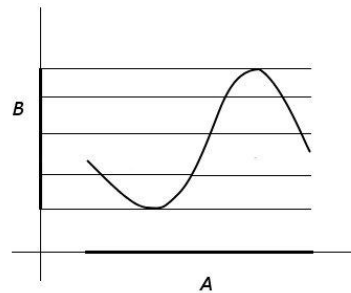


- ▶ Função não injetiva

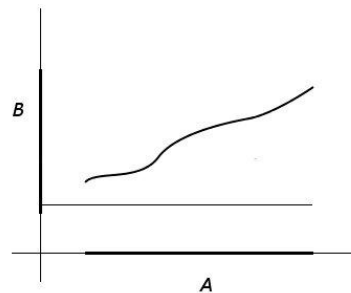


Função sobrejetiva - gráfico

- ▶ f é sobrejetiva se, para qualquer valor de B , a reta horizontal com essa ordenada intersesta o gráfico de f em pelo menos um ponto.
- ▶ Função sobrejetiva



- ▶ Função não sobrejetiva



Operações com funções reais de variável real

Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : C \longrightarrow \mathbb{R}$ então
$$x \mapsto f(x) \qquad x \mapsto g(x)$$

$$\blacktriangleright f + g : D_{f+g} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$\blacktriangleright f - g : D_{f-g} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - g(x)$$

$$\blacktriangleright fg : D_{fg} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)g(x)$$

$$\blacktriangleright \frac{f}{g} : D_{\frac{f}{g}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\blacktriangleright D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = \{x \in D_f \text{ e } x \in D_g\} \text{ e } \\ D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f, x \in D_g \text{ e } x \neq 0\}.$$

Exemplo - Operações com funções

Se $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ então

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \mapsto & 2x \end{array}$$

► $f + g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & \sqrt{x} + 2x \end{array}$$

► $f - g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & \sqrt{x} - 2x \end{array}$$

► $fg : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & 2x\sqrt{x} \end{array}$$

► $\frac{f}{g} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & \frac{\sqrt{x}}{2x} \end{array}$$

► $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = \{x \in \mathbb{R}_0^+ \text{ e } x \in D_g\} = \mathbb{R}_0^+ \text{ e } D_{\frac{f}{g}} = \{x \in \mathbb{R}_0^+, x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0\} = \mathbb{R}^+.$

Composição de funções

Dadas duas funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$ chama-se **composta de g com f** , e representa-se por $g \circ f$ (lê-se g após f), a função $g \circ f: A \longrightarrow C$ definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$.

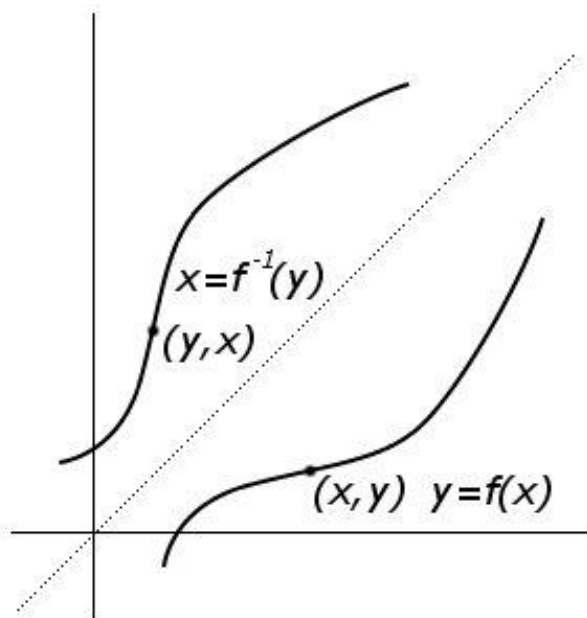
► Exemplo:

Se $f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = \text{sen}^4(x)$, então $g \circ f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $g \circ f(x) = \text{sen}^4(\sqrt{x})$ e $f \circ g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f \circ g(x) = \sqrt{\text{sen}^4(x)} = \text{sen}^2(x)$.

Funções - função inversa

Dada uma função bijetiva, isto é, injetiva e sobrejetiva, $f: A \longrightarrow B$, chama-se **inversa de f** , e representa-se por f^{-1} , a função $f^{-1}: B \longrightarrow A$ definida por $f^{-1}(x) = \text{único elemento de } A \text{ cuja imagem por } f \text{ é } x$.

- ▶ Tem-se que $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ e $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$.
- ▶ O gráfico de f^{-1} obtém-se reflectindo o gráfico de f na reta de equação $y = x$.



Função inversa - exemplos

► $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é injetiva e sobrejetiva, sendo

$$x \mapsto 2x + 5$$

$$g^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x-5}{2}$$

► $g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ é injetiva e sobrejetiva, sendo

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$g^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$x \mapsto x^2$$

► $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é injetiva e sobrejetiva, sendo

$$x \mapsto x^3$$

$$h^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

Função inversa - exemplos

► $\text{sen}_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ é injetiva e sobrejetiva,
$$x \longmapsto \text{sen } x$$

sendo $\arcsen = \text{sen}^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$$x \longmapsto \arcsen x$$

► $\text{cos}_{|[0, \pi]} : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ é injetiva e sobrejetiva, sendo
$$x \longmapsto \text{cos } x$$

$\arccos = \text{cos}^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$
$$x \longmapsto \arccos x$$

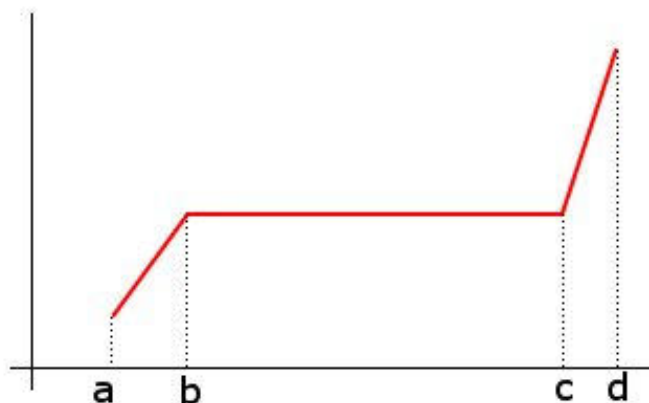
► $\text{tg}_{|]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ é injetiva e sobrejetiva,
$$x \longmapsto \text{tg } x$$

sendo $\text{arctg} = \text{tg}^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$$x \longmapsto \text{arctg } x$$

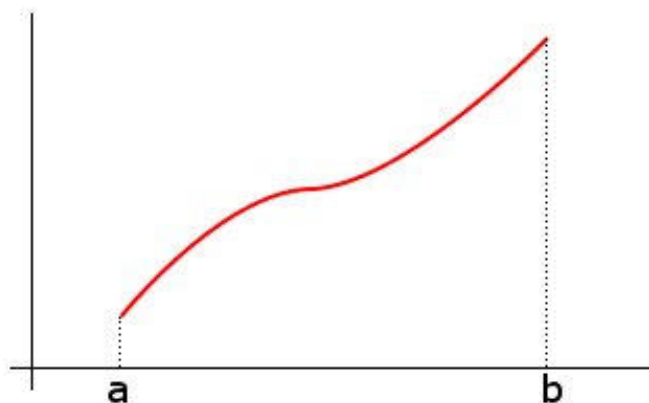
Funções crescentes

Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

- Diz-se que f é **crescente em** $I \subset A$ se para $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.



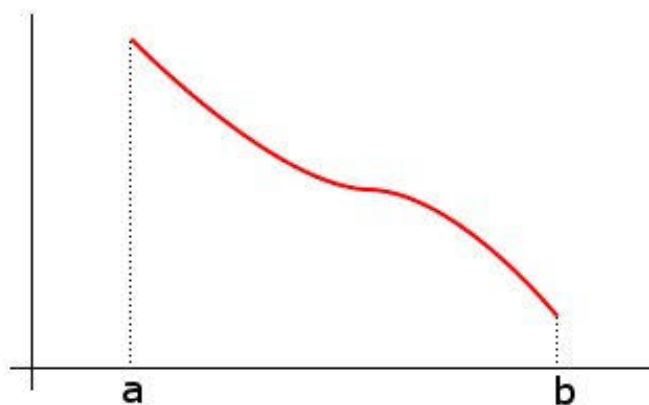
- Diz-se que f é **estritamente crescente** em $I \subset A$ se para $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.



Funções decrescentes

Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

- ▶ Diz-se que f é decrescente em $I \subset A$ se para $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- ▶ Diz-se que f é estritamente decrescente em $I \subset A$ se para $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.



Funções exponenciais

Lembremos que dado um número real a , para qualquer número natural n

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \cdots \times a}_{n \text{ vezes}}$$

para $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

e para $a \in \mathbb{R}_0^+$ e $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

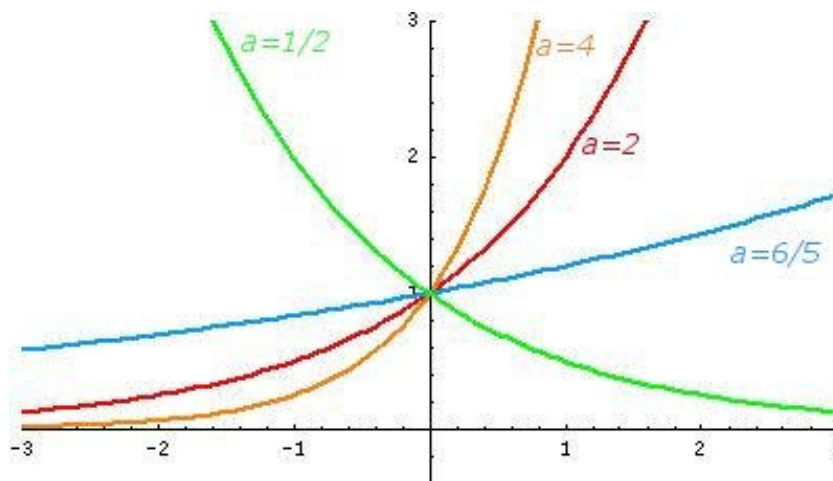
Por exemplo, $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$ e
 $2^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{2^3} = \sqrt[7]{8}$.

Funções exponenciais

Estando assim definido a^q para qualquer número racional $q \neq 0$, estendemos a função para $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ a qualquer número real $x > 0$ e obtemos a função exponencial de base a

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & a^x \end{array}.$$

Gráficos de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x \end{array}$ para $a = 2, 4, \frac{6}{5}, \frac{1}{2}$.



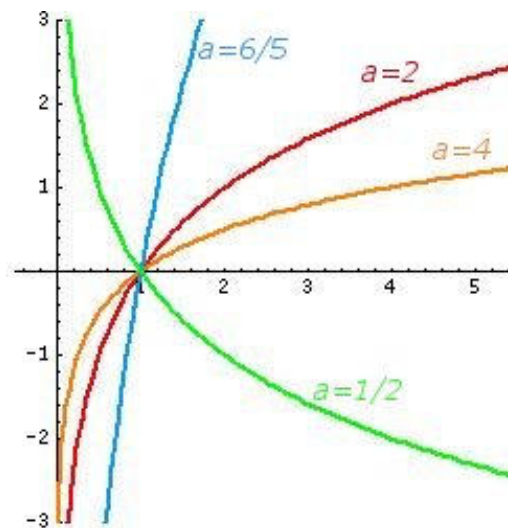
Observemos que a^x é bijetiva, isto é, é injetiva e sobrejetiva, e que é crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$.

Funções logarítmicas

Chama-se função logaritmo de base a , e representa-se por $\log_a$, a função inversa da função exponencial de base a . Assim,

$$\log_a b = c \iff b = a^c.$$

Gráficos de $\log_a$ para $a = 2, 4, \frac{6}{5}, \frac{1}{2}$.



Funções exponenciais e logarítmicas

Algumas propriedades ($a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

▶ $a^{x+y} = a^x a^y$

▶ $a^{xy} = (a^x)^y$

▶ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

▶ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

▶ $\log_a(x^y) = y \log_a x$

▶ $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

▶ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

▶ $\log_a 1 = 0$

▶ $\log_a(a^x) = x$

▶ $a^{\log_a x} = x$

▶ $\frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b x$

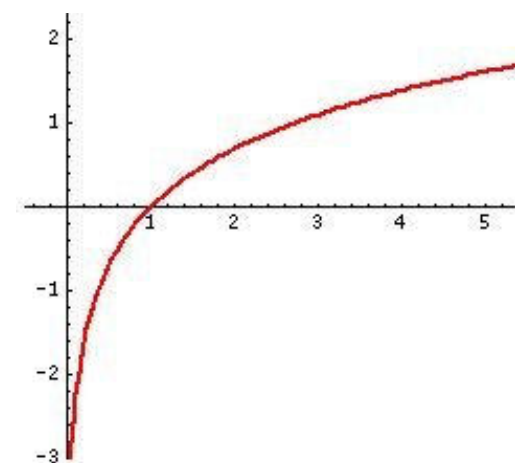
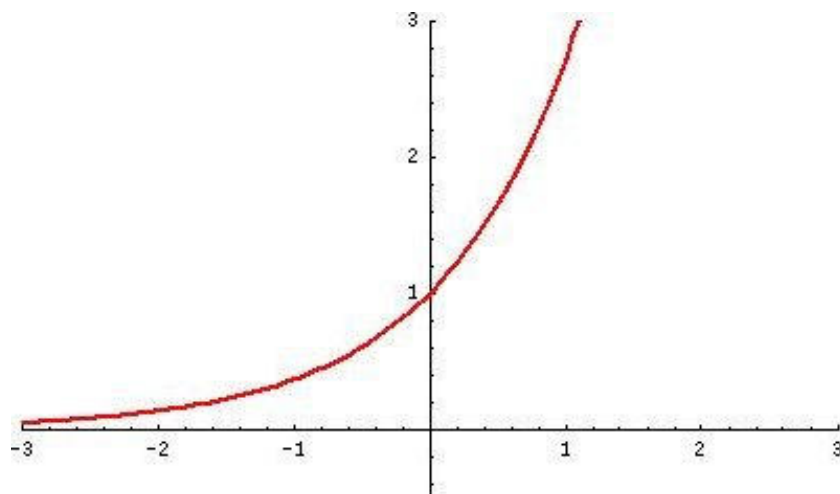
Exponencial e logaritmo de base e

Consideremos o número $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2,718....$

A função exponencial de base e chama-se simplesmente função exponencial e representa-se por e^x ou $\exp$.

Analogamente, no caso do logaritmo de base e, em vez de $\log_e$ escreve-se $\log$ ou $\ln$.

Gráficos de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^x$ $x \mapsto \log x$



Resolução de algumas inequações

► $e^{3x} < 5$

$$e^{3x} < 5 \iff 3x < \ln 5 \iff x < \frac{1}{3} \ln 5.$$

► $2e^x < 3$

$$2e^x < 3 \iff e^x < \frac{3}{2} \iff x < \ln \frac{3}{2} \iff x < \ln 3 - \ln 2.$$

► $\log_{1/5}(6x) > 0$

$$6x > 0 \text{ e } \log_{1/5}(6x) > \log_{1/5} 1 \iff$$

$$x > 0 \text{ e } 6x > 1 \iff x > \frac{1}{6}.$$