II - Trignometria

A amplitude de um ângulo pode ser medida em **graus**, correspondendo 360^o a uma volta completa.

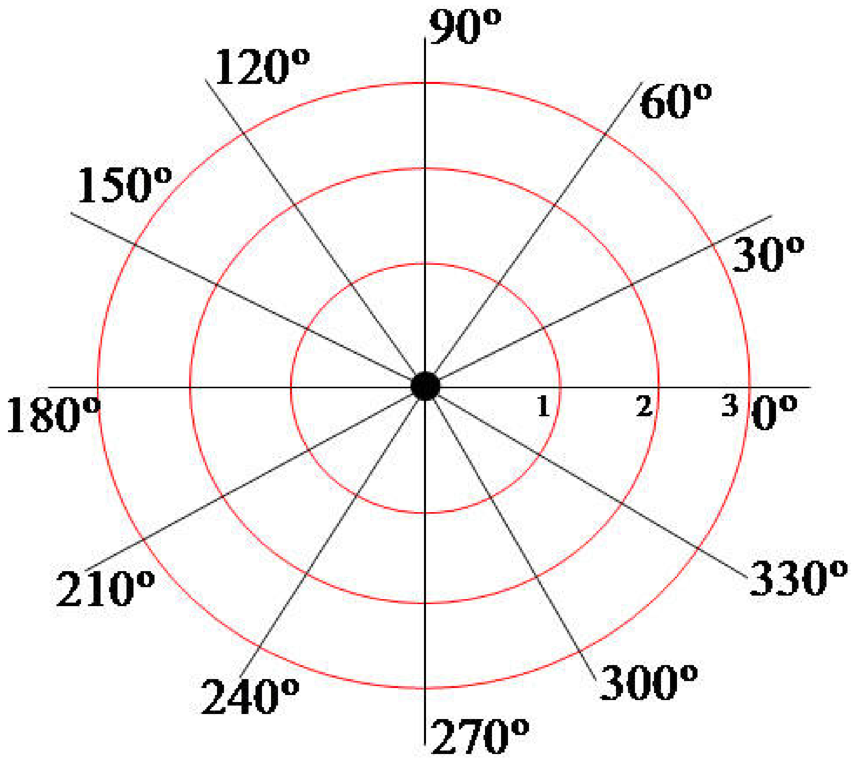


Imagem retirada de http://escolakids.uol.com.br/angulo.htm

Trigonometria - Medida do ângulo

Um ângulo α tal que $0 < \alpha < 180^o$ diz-se **agudo** se $\alpha < 90^o$ ou **obtuso** se $\alpha > 90^o$.

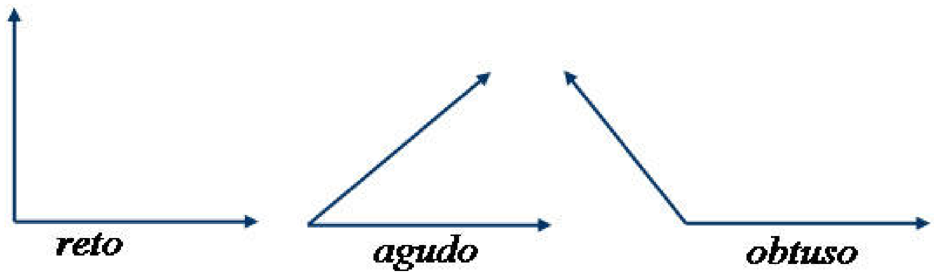


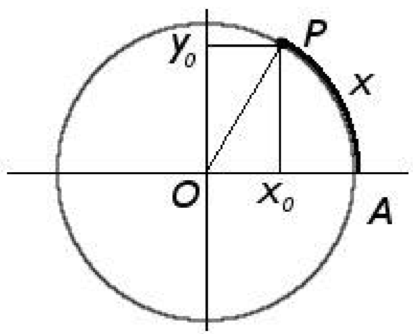
Imagem retirada de http://escolakids.uol.com.br/angulo.htm

O ângulo α é, respetivamente, **nulo, reto ou raso** conforme $\alpha = 0^o$, $\alpha = 90^o$ ou $\alpha = 180^o$.

Trigonometria - Medida do ângulo

A amplitude de um ângulo também pode ser medida em **radianos**, correspondendo 2π radianos a uma volta completa.

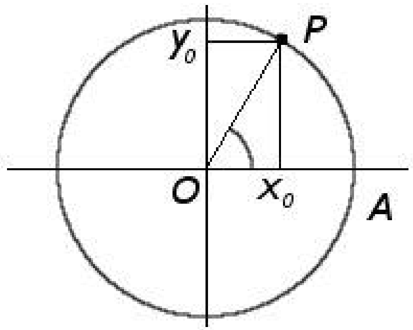
Dado um número real x, consideramos o ponto P tal que o comprimento da circunferência de raio 1 percorrida no sentido directo de A até P é x (se x é negativo percorre-se a circunferência no sentido inverso).
Para $x \in [0, 2\pi]$, o ângulo $\widehat{AOP}$ mede x radianos.



As duas medidas estão relacionadas da seguinte forma :

$$1^o = \frac{\pi}{180} \text{ radianos.}$$

Trigonometria - Seno e Cosseno



- O **seno do ângulo** $\widehat{AOP} = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$.
- O **cosseno do ângulo** $\widehat{AOP} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$.
- Considerando a circunferência unitária (isto é, de raio 1), sen $\widehat{AOP} = y_0$ e cos $\widehat{AOP} = x_0$.

Trigonometria - Seno e Cosseno

Observemos que

θ	$\cos\theta$	$\operatorname{sen}\theta$
$\theta = 0$	$\cos\theta = 1$	$\operatorname{sen}\theta = 0$
$0 < \theta < 90^o$	$0 < \cos\theta < 1$	$0 < \operatorname{sen}\theta < 1$
$\theta = 90^o$	$\cos\theta = 0$	$\operatorname{sen}\theta = 1$
$90^o < \theta < 180^o$	$-1 < \cos\theta < 0$	$0 < \operatorname{sen}\theta < 1$
$\theta = 180^o$	$\cos\theta = -1$	$\operatorname{sen}\theta = 0$
$180^o < \theta < 270^o$	$-1 < \cos\theta < 0$	$-1 < \operatorname{sen}\theta < 0$
$\theta = 270^o$	$\cos\theta = 0$	$\operatorname{sen}\theta = -1$
$270^o < \theta < 360^o$	$0 < \cos\theta < 1$	$-1 < \operatorname{sen}\theta < 0$

Trigonometria - Tangente

A **tangente do ângulo** $\widehat{AOC} = \dfrac{\operatorname{sen} \widehat{AOC}}{\cos \widehat{AOC}}$, desde que C não esteja no eixo vertical.

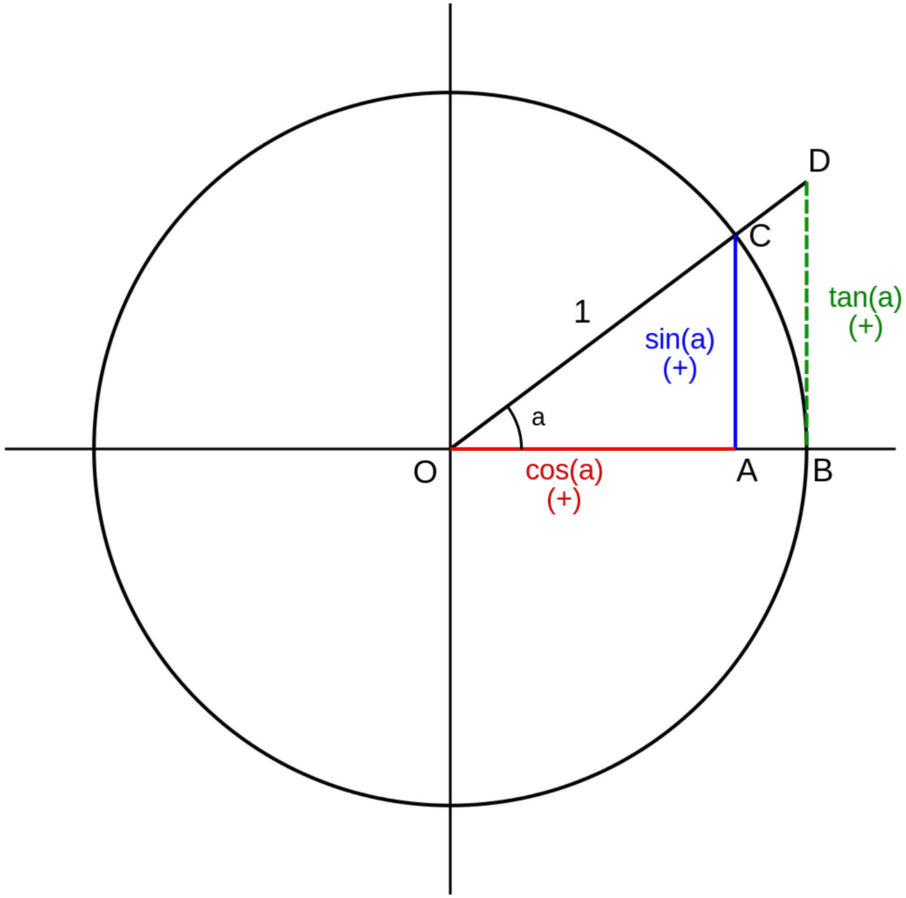
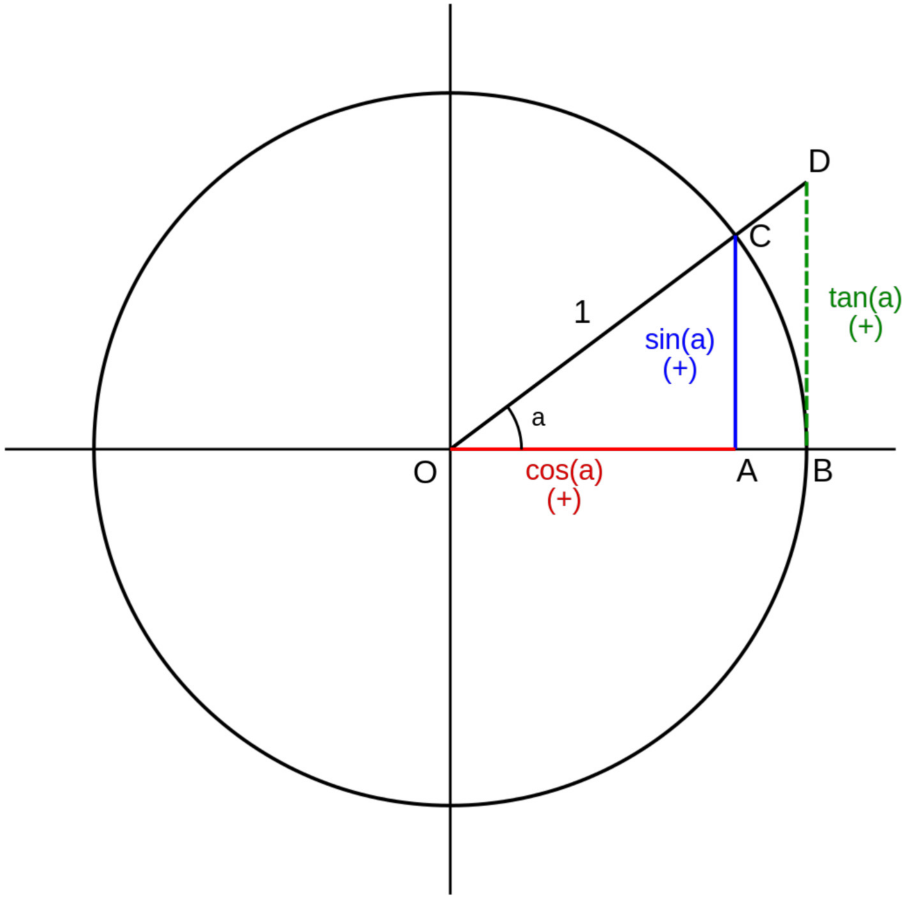


Imagem retirada da Wikiipédia

Trigonometria - Tangente

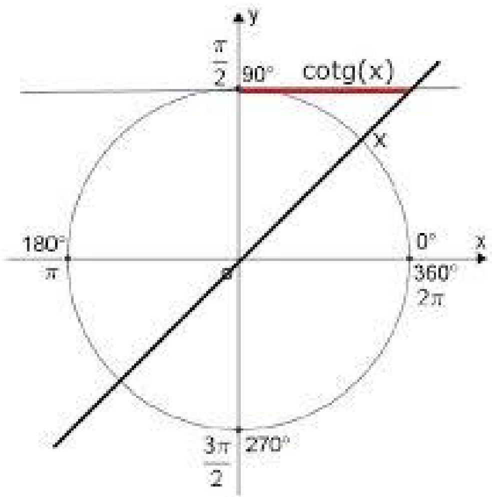
Observemos que $\frac{\operatorname{sen} AOC}{\cos AOC} = \frac{AC}{OA}$ e, pela semelhança dos triângulos AOC e BOD, $\frac{AC}{OA} = \frac{DB}{OB} = \frac{\operatorname{tg} AOC}{1}$.



Se C está no eixo vertical, a tangente não está definida, exceto para o ângulo nulo que tem tangente igual a 0.

Trigonometria - Cotangente

A **cotangente do ângulo** $\widehat{AOC} = \frac{\cos \widehat{AOC}}{\text{sen}\, \widehat{AOC}}$, desde que C não esteja no eixo horizontal.



Se C está no eixo horizontall, a tangente não está definida, exceto para o ângulo nulo que tem cotangente igual a 0.

Trigonometria - Secante e Cosecante

Chama-se **secante do ângulo** $\sec \widehat{AOC} = \frac{1}{\cos \widehat{AOC}}$, desde que C não esteja no eixo vertical.

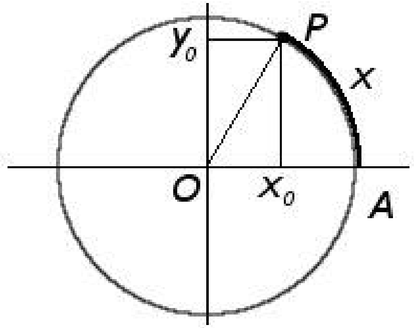
A **cosecante do ângulo** $\operatorname{cosec} \widehat{AOC} = \frac{1}{\operatorname{sen} \widehat{AOC}}$, desde que C não esteja no eixo horizontal.

Trigonometria - Alguns valores

θ	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{sen}\,\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{tg}\,\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	não definido
$\text{cotg}\,\theta$	não definido	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	não definido
$\text{cosec}\,\theta$	não definido	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

Relação Fundamental da Trigonometria

- Chama-se **Relação Fundamental da Trigonometria** à igualdade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.



  A igualdade resulta do Teorema de Pitágoras uma vez que $\overline{OP} = 1$, $\operatorname{sen} x = x_0$ e $\cos x = y_0$.

- Dividindo a a igualdade por $\cos^2 x$ obtemos

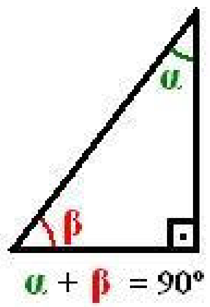
$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Algumas relações trigonométricas

- Mostra-se que
  - $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
  - $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
- Em particular
  - $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
  - $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$
- De $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ resulta que
  - $|\operatorname{sen} \frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
  - $|\cos \frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

Ângulos Complementares

- Chamam-se complementares os ângulos cuja soma é $\frac{\pi}{2}$.



Observemos que

- $\cos x = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$
- $\operatorname{sen} x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$
- $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - x)$

Ângulos Suplementares

- Chamam-se suplementares os ângulos cuja soma é π. Observando o círculo trigonométrico, vemos que
  - $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$
  - $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- Observando o círculo trigonométrico, vemos ainda que
  - $\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$
  - $\cos(-x) = \cos x$
  - $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos x$

Funções trigonométricas inversas - arco seno

- Observemos que os ângulos θ tais que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ podem ser identificados pelo valor do seu seno.

  Para $-1 \leq x \leq 1$ chama-se **arco seno de x** e representa-se por arcsen x o ângulo θ tal que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = x$.
- Por exemplo,
  $\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, portanto $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.
- Mas embora $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}$, pois $\frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{2}$.
- Analogamente, embora $\operatorname{sen}(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
  $\operatorname{arcsen}\frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4} \neq -\frac{3\pi}{4}$, pois $-\frac{3\pi}{4} < -\frac{\pi}{2}$.

Funções trigonométricas inversas - arco cosseno

- Analogamente, os ângulos θ tais que $0 \leq \theta \leq \pi$ podem ser identificados pelo valor do seu cosseno.

  Para $-1 \leq x \leq 1$ chama-se **arco cosseno de x** e representa-se por arccos x o ângulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ e $\cos\theta = x$.
- Por exemplo,
  $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, portanto $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.
- Mas embora $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3} \neq \frac{4\pi}{3}$ pois $\frac{4\pi}{3} > \pi$.

Funções trigonométricas inversas - arco tangente

- Também os ângulos θ tais que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ podem ser identificados pelo valor da sua tangente.

  Para qualquer número real x, chama-se **arco tangente de x** e representa-se por arctg x o ângulo θ tal que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{tg}\theta = x$.
- Por exemplo,
  $-\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, portanto $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.
- Mas embora $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} = -\sqrt{3}$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{-\pi}{3} \neq \frac{4\pi}{3}$ pois $\frac{4\pi}{3} > \frac{\pi}{2}$.