Matemática M1029

Adaptado dos slides da Professora Rosário Pinto

Slides de apoio às aulas teóricas

Ano letivo 2024/25

Programa:

1) Geometria
2) Trigonometria
3) Estatística e métodos numéricos
4) Funções
5) Continuidade e derivadas de funções reais de uma variável real
6) Derivação e integração

Avaliação

A nota final é a soma da classificação obtida em 3 testes ou a classificação de exame na época de recurso.

O primeiro teste totaliza 6 valores e os restantes 7. Para aprovação nos testes é necessário a soma de pelo menos a 9,50.

Na data prevista para o exame da época normal no calendário de exames haverá uma prova com 3 partes, cada uma correspondente a um teste, na qual os estudantes têm a possibilidade de repescar algum ou alguns dos resultados anteriormente obtidos nos testes.

Para aprovação no exame de recurso é necessário uma classificação de pelo menos 9,50 (em 20). O exame de recurso constará de 3 partes, cada uma correspondente a um teste, na qual os estudantes têm a possibilidade de repescar algum ou alguns dos resultados anteriormente obtidos nos testes.

Um teste adicional, escrito ou oral, poderá ser pedido para classificações maiores ou iguais a 18 valores (em 20).

Datas

Datas propostas para os testes:

1^o teste: 23 de Outubro (a confirmar)

2^o teste: 27 de Novembro (a confirmar)

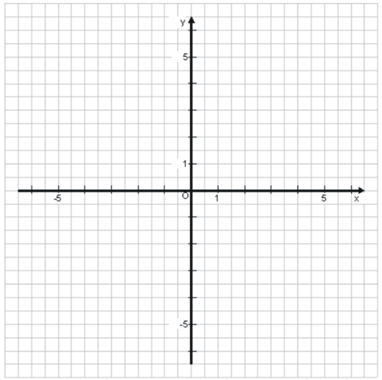
3^o teste: 18 de Dezembro

Os dois primeiros testes serão na primeira hora das aulas teóricas, portanto das 9 às 10, o último teste será das 11 ás 12. A sala será confirmada mais tarde se será a sala usual ou não.

I - Geometria

Referencial ortonormado do plano

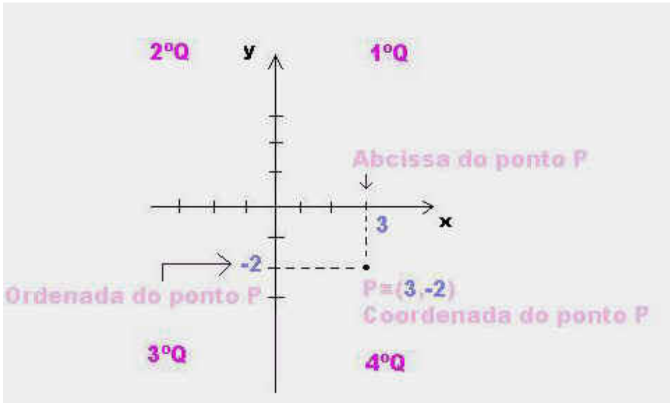
Um **referencial ortonormado do plano** consiste em duas retas graduadas e orientadas do plano, chamadas **eixos do referencial**, que se intersetam perpendicularmente num ponto O, chamado **origem das coordenadas**. As retas estão graduadas usando uma unidade de medida (centímetro, metro, quadradinho, etc).



O eixo horinzontal é normalmente referido como **eixo dos xx** e o vertical como **eixo dos yy**.

Coordenadas cartesianas

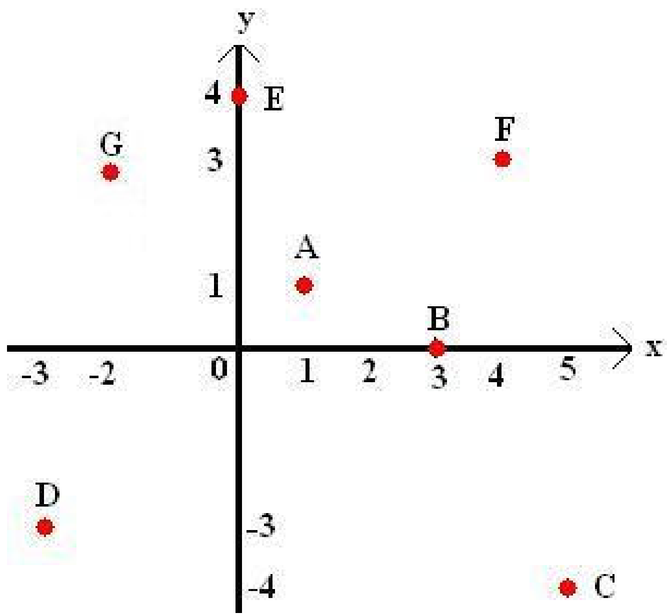
Cada ponto do plano pode ser localizado no referencial cartesiano por um par de números reais, chamado **as coordenadas do ponto**.



A primeira coordenada chama-se **abcissa** do ponto e a segunda coordenada chama-se **ordenada** do ponto.
O referencial divide o plano em quatro quadrantes, ordenados conforme mostra a figura.

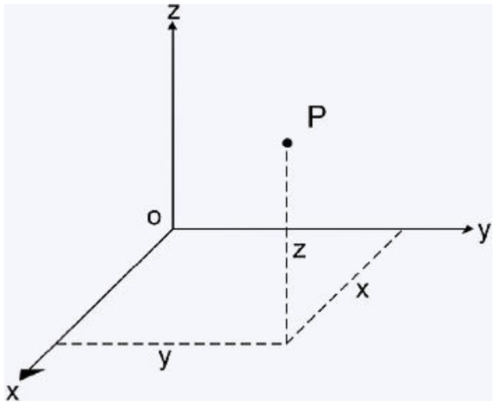
Coordenadas cartesianas

A origem do referencial tem coordenadas (0,0) e, por exemplo, o ponto C (5,-4) está 5 unidades à direita da origem e 4 unidades abaixo do eixo dos xx.
Indique as coordenadas dos restantes pontos.



Referencial ortonormado do espaço

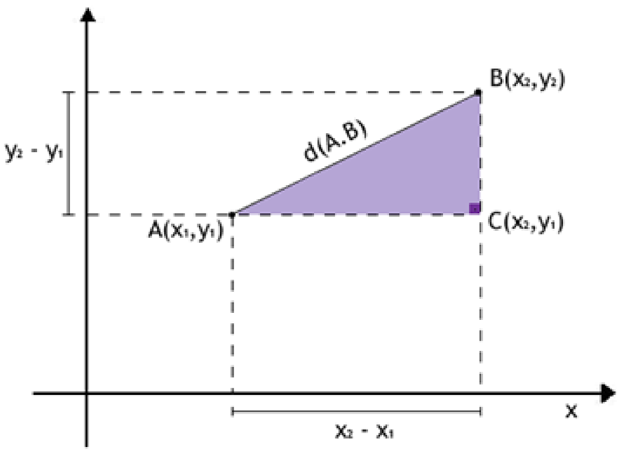
Analogamente, um **referencial ortonormado do espaço** consiste em três retas graduadas e orientadas, chamadas **eixos do referencial**, que se intersetam perpendicularmente num ponto O, a **origem das coordenadas**.
Os eixos no plano horinzontal são referidos como **eixo dos xx** e **eixo dos yy**, sendo o eixo perpendicular a esse plano o **eixo dos zz**.



Os pontos do espaço podem ser localizados por um terno de números (x_0, y_0, z_0), as coordenadas do ponto, representando z_0 a distância do ponto ao plano horizontal.

Distância entre dois pontos no plano

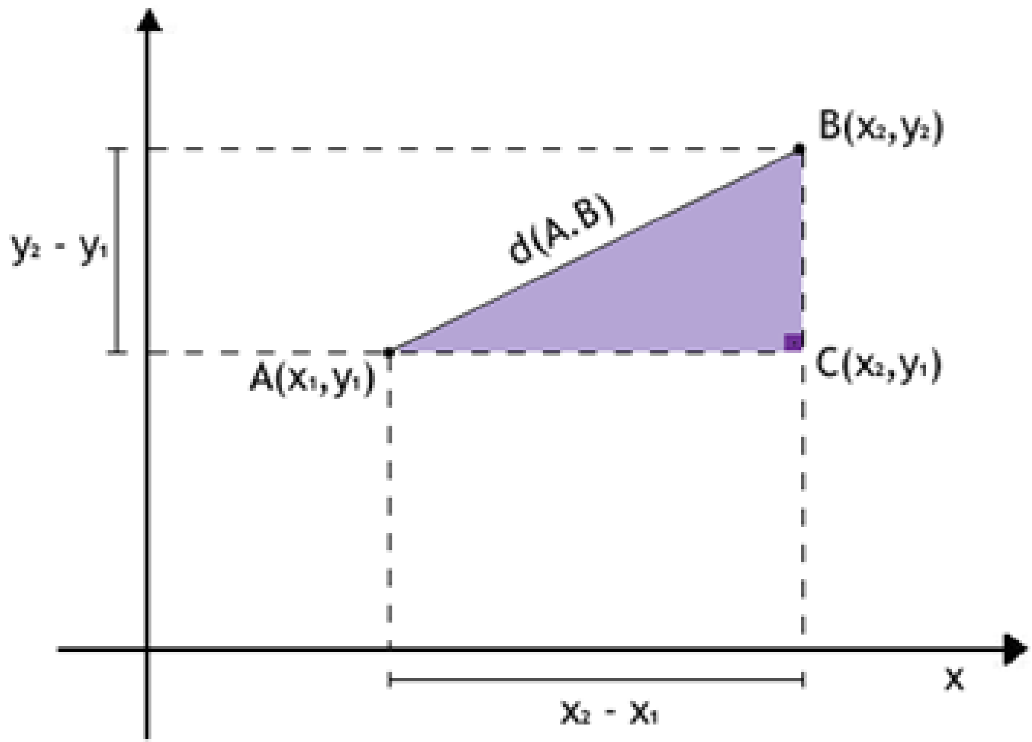
A distância entre dois pontos do plano pode ser calculada a partir das respetivas coordenadas.



Observemos que como o ponto C tem a mesma ordenada que A e a mesma abcissa que B então o triângulo ACB é retângulo em C.

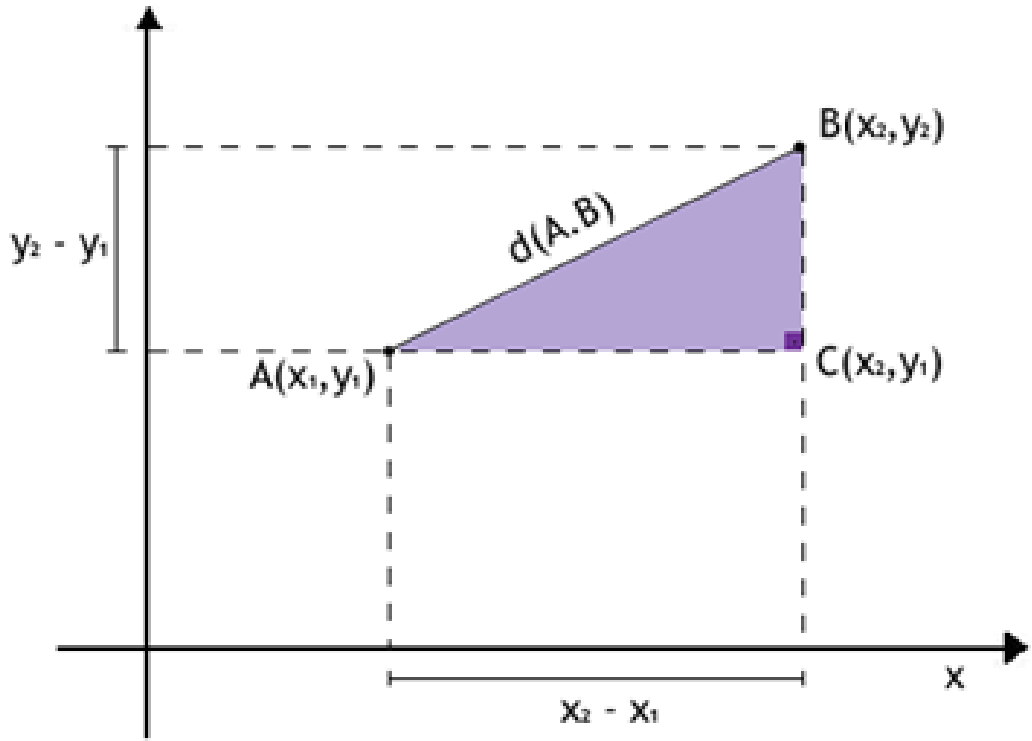
Distância entre dois pontos no plano

Observemos ainda que como o ponto C tem a mesma ordenada que A então a distância de A a C é igual à diferença de abcissas, isto é, $|x_2 - x_1|$. E como C tem a mesma abcissa que B, a distância de B a C é igual à diferença de ordenadas, isto é, $|y_2 - y_1|$.



Distância entre dois pontos no plano

Então podemos calcular $d(A, B)$, a distância entre A a B usando o **Teorema de Pitágoras**: Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.



Assim,

$$d(A, B)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Distância entre dois pontos no plano

Portanto, a distância entre $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ é igual a

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Por exemplo, se A tem coordenadas $(2, 1)$ e B tem coordeandas $(3, 7)$, a distância de A a B é igual a

$$d(A, B) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}.$$

Ponto médio do segmento AB

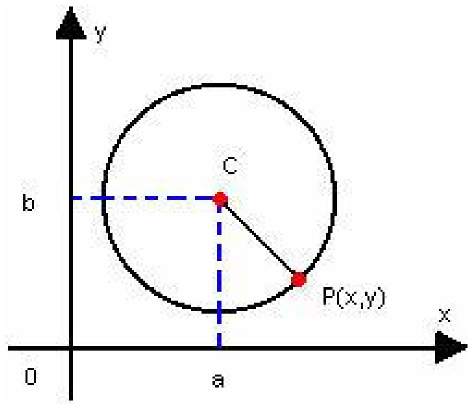
O **ponto médio do segmento** AB é o ponto do segmento AB que está a igual distância de A e B.

Se A tem coordenadas (x_1, y_1) e B (x_2, y_2) então o ponto médio M do segmento AB tem coordenadas $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.

Por exemplo, se A tem coordenadas $(2, 1)$ e B tem coordeandas $(3, 7)$, então o ponto médio M de AB tem coordenadas $(\frac{5}{2}, 4)$.

Circunferência

A **circunferência centrada em** C **e de raio** r é o conjunto dos pontos do plano que estão à distância r de C.



Se C tem coordenadas (a, b), então os pontos $P(x, y)$ que pertencem à circunferência são os pontos para os quais se verifica

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

ou seja

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Circunferência

Por exemplo, os pontos que pertencem à circunferência de centro $(2,3)$ e raio 5 são os pontos $P(x,y)$ para os quais se verifica $(x-2)^2+(y-3)^2=25$.

Analogamente, os pontos $P(x,y)$ para os quais se verifica $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ são os pontos que pertencem à circunferência de centro $(2,-3)$ e raio 2.

E os pontos $P(x,y)$ que pertencem à circunferência de centro na origem ($O(0,0)$ e raio $\sqrt{2}$ são aqueles para os quais se verifica $x^2+y^2=2$.

Círculo

O **círculo centrado em** C **e de raio** r é o conjunto dos pontos que estão à distância menor ou igual a r de C.

Se C tem coordeandas (a, b), então os pontos $P(x, y)$ que pertencem ao círculo são os pontos para os quais se verifica

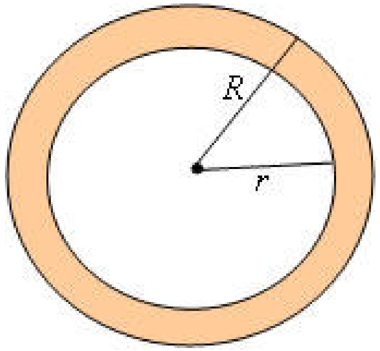
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq r$$

ou seja

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq r^2.$$

Coroa circular

Se C tem coordenadas (a, b), então os pontos $P(x, y)$ para os quais se verifica $(x-a)^2 + (y-b)^2 \geq r^2$ são os pontos que estão no exterior ou sobre do círculo centrado em C e de raio r.



O desenho mostra dois círculos com o mesmo centro e pinta a rosa os pontos que estão no interior do círculo de raio R e no exterior do círculo de raio r. Assim os pontos $P(x, y)$ marcados a rosa são os pontos para os quais se verifica

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \geq r^2 \text{ e } (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$$

isto é

$$r^2 \leq (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2.$$

Exemplos

Os pontos $P(x, y)$ para os quais se verifica $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 1$ são os pontos da circunferência de centro $(1, -5)$ e raio 1.

Os pontos $P(x, y)$ para os quais se verifica

$$(x - \frac{1}{3})^2 + (y-7)^2 \leq 16$$

são os pontos do círculo de centro $(\frac{1}{3}, 7)$ e raio 4.

Os pontos $P(x, y)$ para os quais se verifica

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 > 100$$

são os pontos exteriores ao círculo de centro $(3, -3)$ e raio 10.

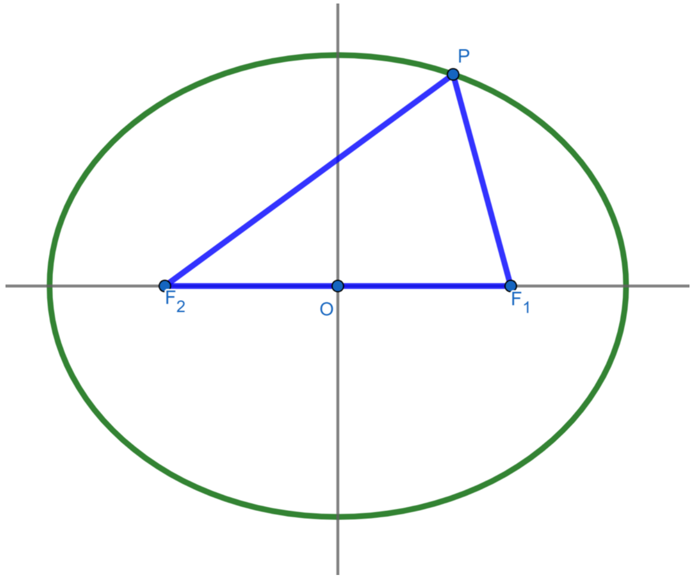
Os pontos $P(x, y)$ para os quais se verifica

$$4 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 25$$

são os pontos da coroa circular de centro $(1, 0)$ limitadas pelas circunferências de raios respetivamente 2 e 5.

Elipse

Uma **elipse** é o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1, F_2 é igual a um comprimento dado $2a$ maior que a distância de F_1 a F_2.



Se $F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0)$, os pontos $P = (x, y)$ que pertencem à elipse são os pontos para os quais se verifica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde $b^2 = a^2 - c^2$.

Distância entre dois pontos no espaço

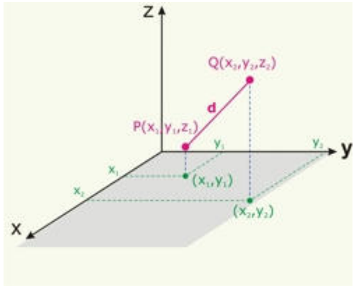
Analogamente, a distância entre dois pontos do espaço pode ser calculada a partir das respetivas coordenadas.

Se dois pontos P e Q têm a terceira coordenada igual, isto é, se estão no mesmo plano horizontal, então a distância entre os pontos P e Q no espaço é igual à distância das suas projeções no plano $z = 0$ e pode ser calculada usando a fórmula para a distância entre dois pontos do plano.

Isto é, se P tem coordenadas (x_1, y_1, z_1) e Q tem coordenadas (x_2, y_2, z_1) então $d(P, Q)$ é igual a $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Distância entre dois pontos no espaço

Consideremos agora o caso dos pontos P e Q não estarem no mesmo plano horizontal.



Se P tem coordenadas (x_1, y_1, z_1) e Q tem coordenadas (x_2, y_2, z_2), consideremos Q', a projeção de Q no plano $z = z_1$. Então o ponto Q' tem coordenadas (x_2, y_2, z_1). Como P e Q' estão no mesmo plano horizontal, a distância entre P e Q' é igual à distância entre os pontos $(x_1, y_1, 0)$ e $(x_2, y_2, 0)$, isto é

$$d(P, Q') = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Distância entre dois pontos no espaço

Observemos que, como Q' é a projeção de Q no plano $z = z_1$, as retas QQ' e PQ' são perpendiculares, logo o triângulo $PQ'Q$ é retângulo em Q'.

Então pelo Teorema de Pitágoras, vem que

$$d(P,Q)^2 = d(P,Q')^2 + d(Q,Q')^2.$$

Como $d(Q,Q') = |z_2 - z_1|$, obtemos

$$d(P,Q)^2 = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] + (z_2 - z_1)^2.$$

Distância entre dois pontos no espaço

Assim, se P tem coordenadas (x_1, y_1, z_1) e Q tem coordenadas (x_2, y_2, z_2) então

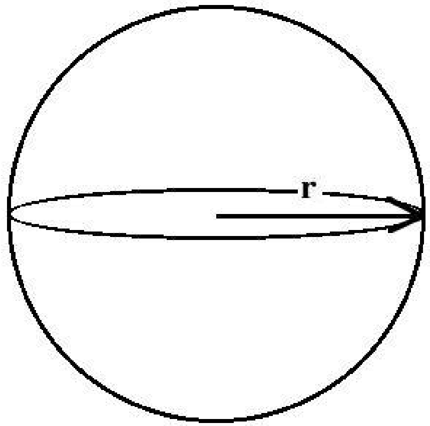
$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Por exemplo, se P tem coordenadas $(2, 1, 5)$ e Q tem coordenadas $(2, 2, 7)$, a distância de P a Q é igual a

$$d(P, Q) = \sqrt{(2-2)^2 + (2-1)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Esfera

A **esfera (oca) centrada em** C **e de raio** r é o conjunto dos pontos do espaço que estão à distância r de C.



Se C tem coordenadas (a, b, c), então os pontos $P(x, y, z)$ que pertencem à esfera são os pontos para os quais se verifica

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$$

ou seja

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Esfera

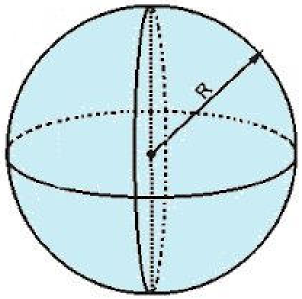
Por exemplo, os pontos que pertencem à esfera de centro $(2, 3, 1)$ e raio 5 são os pontos $P(x, y, z)$ para os quais se verifica $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Analogamente, os pontos $P(x, y, z)$ para os quais se verifica $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 4$ são os pontos que pertencem à esfera de centro $(2, -3, 0)$ e raio 2.

E os pontos $P(x, y, z)$ que pertencem à esfera de centro na origem $O(0, 0, 0)$ e raio $\sqrt{2}$ são aqueles para os quais se verifica $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Esfera

A **esfera sólida centrada em** C **e de raio** r é o conjunto dos pontos do espaço que estão à distância menor ou igual a r de C.



Se C tem coordenadas (a, b, c), então os pontos $P(x, y, z)$ que pertencem à esfera sólida são os pontos para os quais se verifica

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \leq r$$

ou seja

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq r^2.$$

Exemplos

Os pontos $P(x, y, z)$ para os quais se verifica

$$(x-1)^2 + (y+5)^2 + (z-4)^2 = 1$$

são os pontos da esfera (oca) de centro $(1, -5, 4)$ e raio 1.

Os pontos $P(x, y)$ para os quais se verifica

$$(x - \frac{1}{3})^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 \leq 16$$

são os pontos da esfera sólida de centro $(\frac{1}{3}, 7, -1)$ e raio 4.

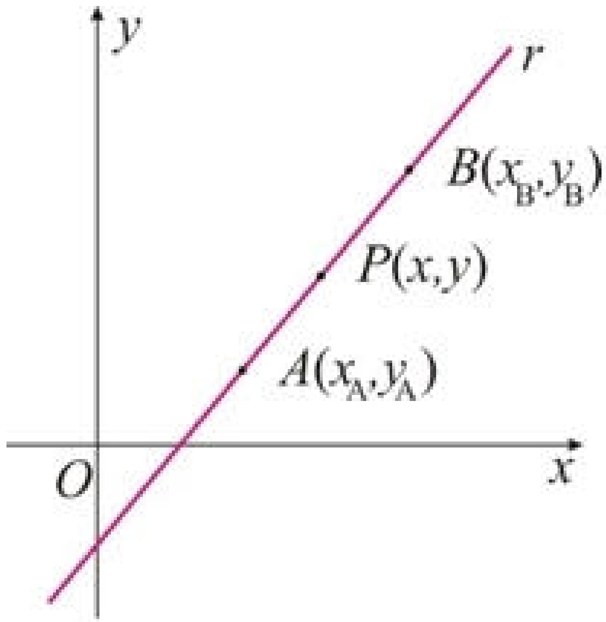
Os pontos $P(x, y, z)$ para os quais se verifica

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 \geq 100$$

são os pontos exteriores ao círculo de centro $(3, -3, 1)$ e raio 10.

Reta definida por dois pontos

Dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ de uma reta r não vertical, com $x_B \neq x_A$, o quociente $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ é o mesmo quaisquer que sejam os pontos A e B da reta.



O número $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ chama-se **declive da reta** e dá informação sobre a inclinação da reta: a reta sobe para a direita se $m > 0$, a reta desce para a direita se $m < 0$ e a reta é horizontal se $m = 0$.

Reta definida por dois pontos

Por exemplo, a reta definida pelos $A(2,5)$ e $B(1,9)$ tem declive $m = \frac{9-5}{1-2} = -4$.

Como este quociente é igual quaisquer que sejam os pontos da reta, podemos utilizá-lo para encontrar uma equação para a reta definida pelos dois pontos, isto é, uma equação tal que todos os pontos da reta são solução e os pontos que não pertencem à reta não são solução.

Assim, se $P(x,y)$ é um ponto qualquer da reta definida pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, temos

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

e uma equação da reta é

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

Equação reduzida da reta não vertical

Por exemplo, voltando ao exemplo anterior, a reta definida pelos $A(2,5)$ e $B(1,9)$ tem equação

$$\frac{y-5}{x-2} = -4.$$

Podemos escrever esta equação de outra forma, multiplicando-a por $x-2$ obtemos

$$y-5 = -4(x-2).$$

Observemos que

$$y-5 = -4(x-2) \iff y-5 = -4x+8 \iff y = -4x+13.$$

À equação $y = -4x + 13$ cham-se **equação reduzida da reta**.

Equação reduzida da reta não vertical

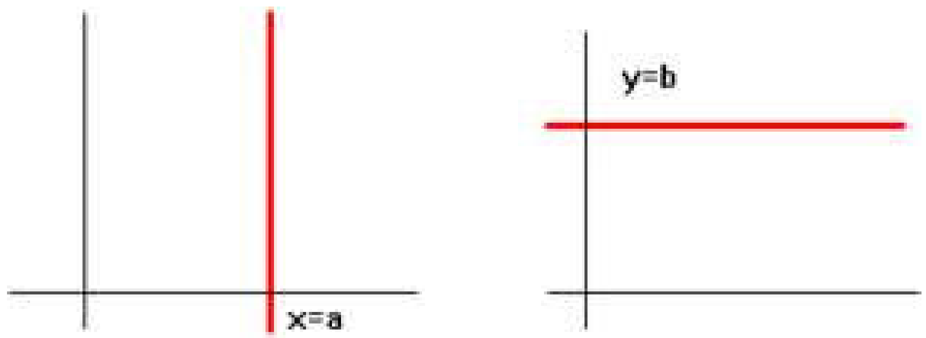
A **equação reduzida de uma reta** é uma equação da forma $y = mx + b$ onde m é o declive da reta e b a ordenada do ponto de abcissa 0, isto é, do ponto em que a reta corta o eixo dos yy.

Por exemplo, a equação reta que tem declive 5 e corta o eixo dos yy no ponto $(0, -2)$ é $y = 5x - 2$.

Se conhecermos o declive de uma reta s e um ponto na reta, podemos encontrar a equação reduzida da reta s como no exemplo seguinte:
Por exemplo, se a reta s tem declive -3 e passa no ponto $(-1, 10)$, então a equação reduzida desta reta vai ser da forma $y = -3x + b$ e o ponto $(-1, 10)$ é solução desta equação,
isto é, $10 = -3 \times (-1) + b$.
Fazendo as contas, vem $b = 7$ e a equação reduzida da reta é $y = -3x + 7$.

Retas horizontais e retas verticais

Uma **reta horizontal** é uma reta paralela ao eixo dos xx. Neste caso, o declive é 0, pois a reta não tem inclinação, e a equação reduzida da reta é do tipo $y = b$. Isto é, todos os pontos da reta têm ordenada b e isso é o que carateriza a reta.

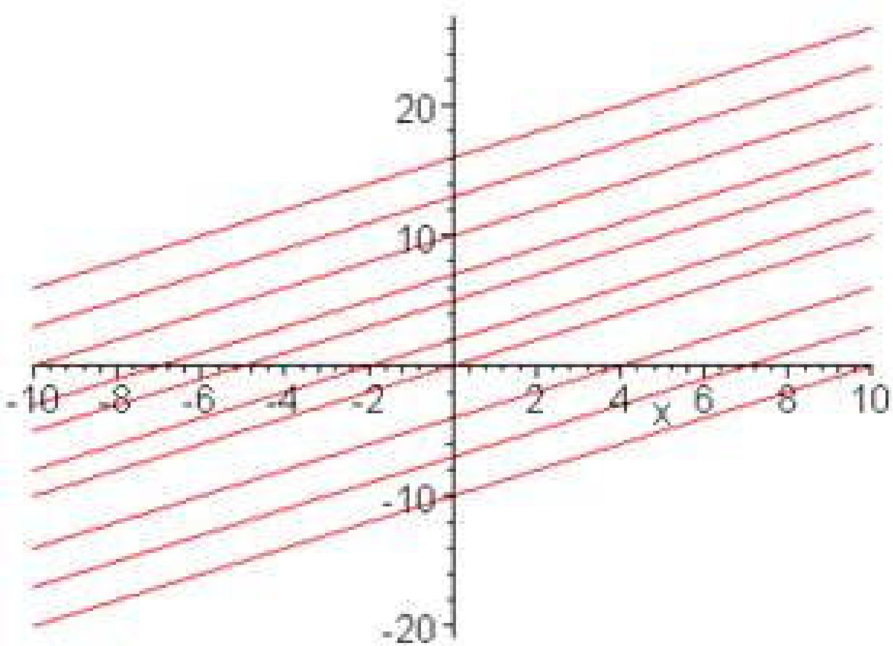


Uma **reta vertical** é uma reta paralela ao eixo dos yy. Neste caso não faz sentido falar em declive da reta. O que carateriza a reta vertical é todos os pontos terem a mesma abcissa e a equação da reta é do tipo $x = a$.

Retas paralelas

Observemos que quaisquer **duas retas verticais são paralelas**.

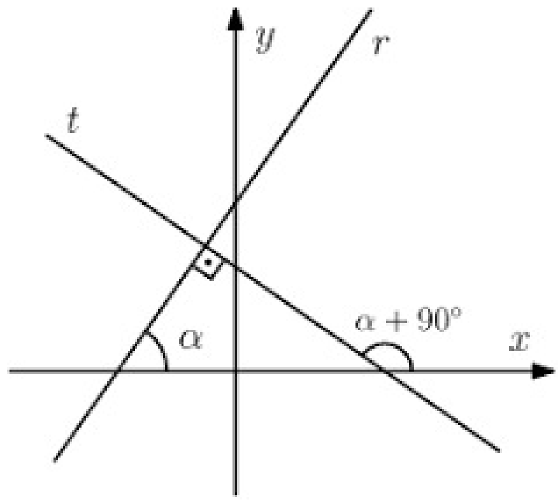
Duas retas não verticais são paralelas se têm a mesma inclinação, isto é, **o mesmo declive**.



Por exemplo, as retas com equações $y = 2x + 3$ e $y = 2x - 8$ são paralelas.

Retas perpendiculares

Qualquer reta horizontal é perpendicular a qualquer reta vertical.
No caso de duas retas r e s que não sejam horizontais nem verticais, tendo r declive m_r e s declive m_s, as retas são perpendiculares se $m_r = -\frac{1}{m_s}$.



Por exemplo, as retas com equações $y = 2x + 3$ e $y = -\frac{1}{2}x - 8$ são perpendiculares.

Vetores no plano

- Dois segmentos AB e CD do plano, tendo A coordenadas (a_1, a_2), B (b_1, b_2), C (c_1, c_2) e D (d_1, d_2), são paralelos se existe um número real k tal que $(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (k(d_1 - c_1), k(d_2 - c_2))$.
- Por exemplo, o segmento com extremos nos pontos de coordenadas $(2, 1)$ e $(3, 3)$ é paralelo aos segmentos, respetivamente, com extremos em $(5, 4)$ e $(6, 6)$ e com extremos em $(-4, 2)$ e $(-3, 4)$.
- Se considerarmos segmentos orientados, sendo o primeiro ponto a origem do segmento, observamos que $k > 0$ se os segmentos têm o mesmo sentido e $k < 0$ quando os segmentos têm sentidos contrários.
- Se dois segmentos orientados forem paralelos, tiverem o mesmo sentido e o mesmo comprimento, então $k = 1$, isto é, as diferenças entre as coordenadas dos pontos extremos são iguais.

Vetores no plano

Se o ponto A tem coordenadas (a_1, a_2) e B (b_1, b_2), o **vetor** $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ e representa a direção, sentido e comprimento do segmento orientado AB.

Diz-se que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem **comprimento** $|AB|$ sendo

$$|AB| = d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Vetores no plano - Produtor escalar ou interno

Dados dois vetores $\overrightarrow{u}$, de coordenadas (u_1, u_2), e $\overrightarrow{v}$, de coordenadas (v_1, v_2), define-se o **produto interno ou escalar de $\overrightarrow{u}$ com $\overrightarrow{v}$** e representa-se por $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ o número real

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Por exemplo, o produto escalar dos vetores de coordenadas $(1, 2)$ e $(-3, 5)$ é igual a $1 \times (-3) + 2 \times 5 = 7$.

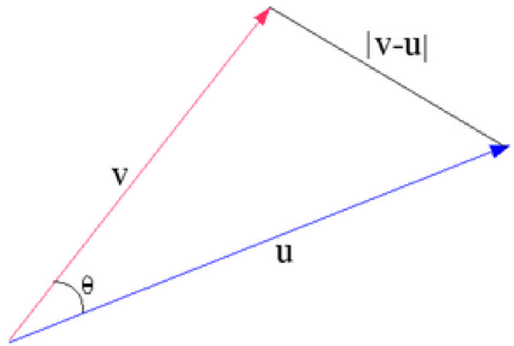
Observamos que para qualquer vetor $\overrightarrow{u}$

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}.$$

Mostra-se que o produto interno ou escalar de dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é igual a

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \cos\theta$$

onde θ é o ângulo definido pelas direções e sentidos de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.



Assim, se o produto escalar de dois vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ for igual a 0 então as direções definidas por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são perpendiculares e os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dizem-se **ortogonais**.

Simetrias ou Isometrias no plano

Chama-se **isometria** uma transformação que mantém as distâncias, isto é, uma transformação tal que a distância entre os objetos é igual à distância entre as imagens.

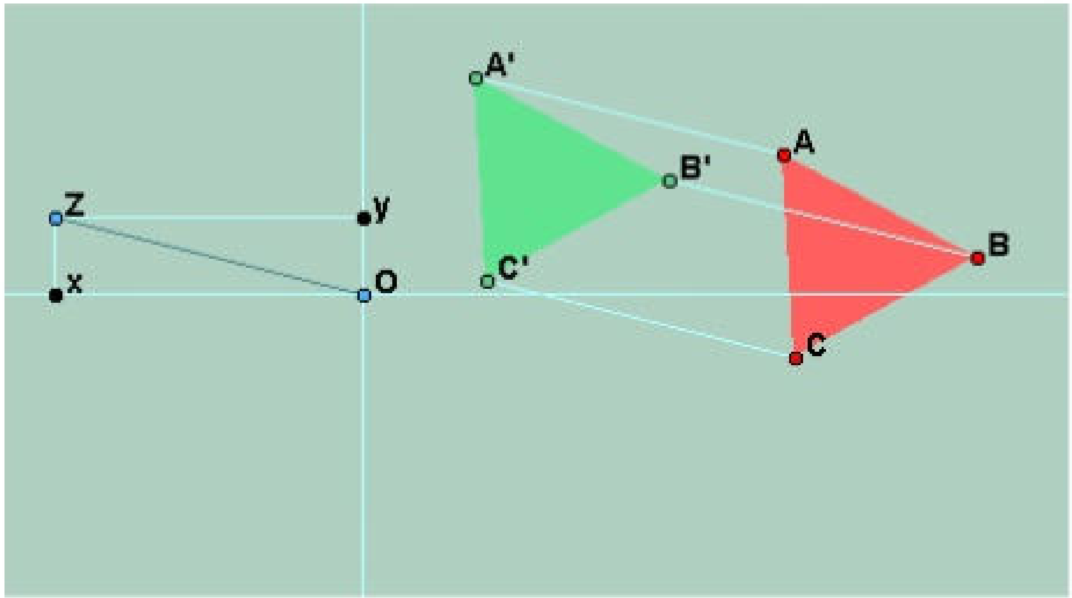
Existem 4 tipos de **isometrias ou simetrias** no plano:

- translação por um vetor
- rotação
- reflexão numa reta
- reflexão deslizante

Nota: Os 4 slides seguintes são retirados de https://pt.slideshare.net/estudamatematica/isometrias-11757371/2

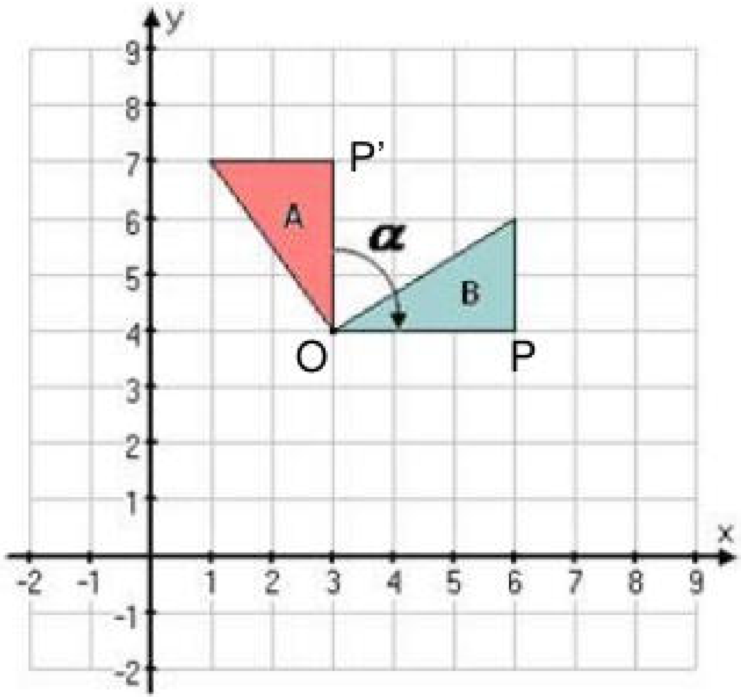
Translação

- A translação do plano associada a um vetor dado é uma transformação geométrica que transforma qualquer ponto P de plano num ponto P' tal que o segmente de reta de origem P e extremidade P' tem a mesma direção, comprimento e sentido do vetor dado.



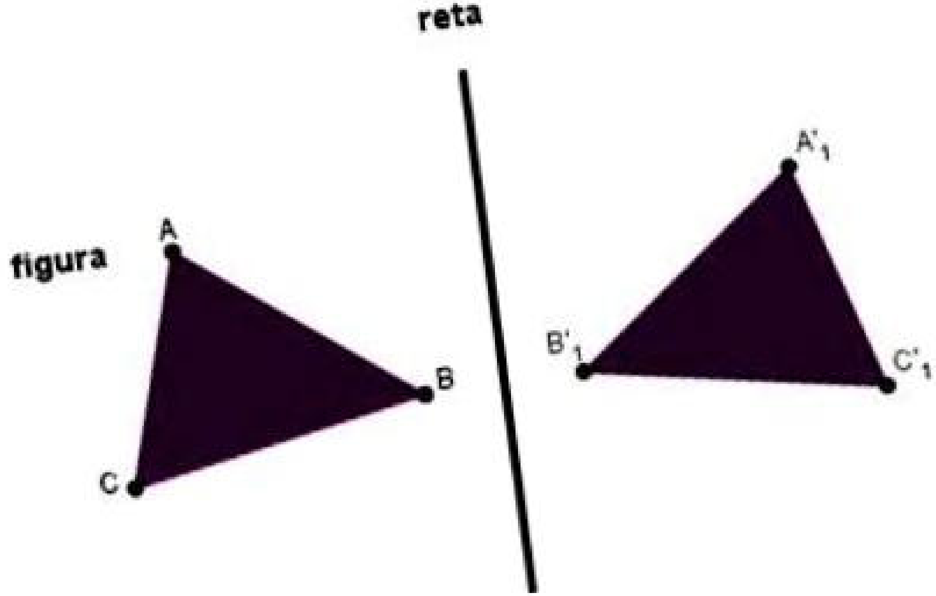
Rotação

- Dado o ponto O, centro da rotação e uma amplitude α, ângulo de rotação, chama-se rotação de centro O e amplitude α à translação geométrica que a um ponto P faz corresponder um ponto P', tal que a distância de O a P é igual à de O a P'. A amplitude do ângulo orientado definido por P, O e P' é igual a α.



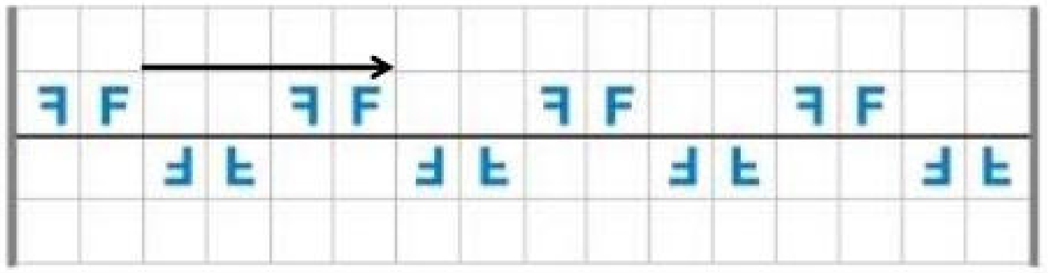
Reflexão

- Dada uma reta *r* (eixo de reflexão), dá-se o nome de reflexão do eixo *r* à transformação geométrica que transforma os pontos de *r* em si próprios e que, a cada ponto *P* não pertencentes a *r*, faz corresponder um ponto *P'* tal que a distância de *P* a *r* é igual à distância de *P'* a *r* e *PP' é perpendicular a r*.



Reflexão Deslizante

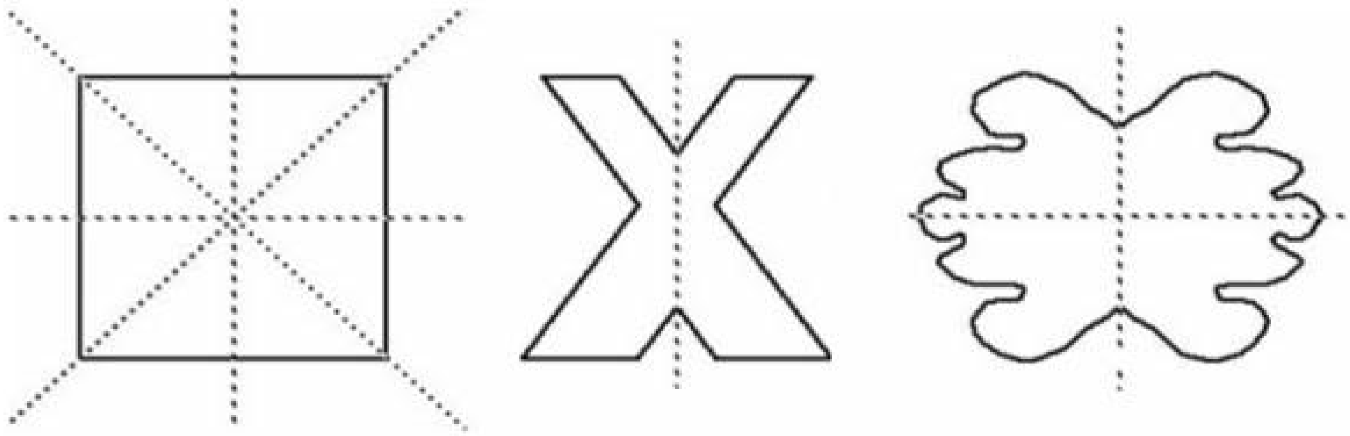
- Reflexão deslizante é uma transformação geométrica resultante da composição de uma reflexão de eixo *r* com uma translação cujo vetor é paralelo a *r*.



Simetrias ou Isometrias no plano

Diz-se que uma figura F do plano **admite uma simetria** se a imagem de F por essa simetria coincide com F.

Por exemplo, as figuras seguintes admitem como simetrias as reflexões nas retas indicadas.



Exemplos de eixos de simetria.

Imagem retirada da Wikipédia

Nos azulejos dos palácios de Alhambra, em Granada, podem encontrar-se os vários tipos de simetria.

https://www.alhambradegranada.org/en/info/galleryofphotographs/tiles.asp

Simetrias ou Isometrias no plano

A figura abaixo admite uma rotação de 45^o como simetria. Quais são as outras simetrias da figura?

Imagem retirada de http://www.estudarmatematica.pt/2015/02/simetria-de-rotacao-ou-rotacional.html

Simetrias ou Isometrias no plano

O friso abaixo admite como simetria uma translação.

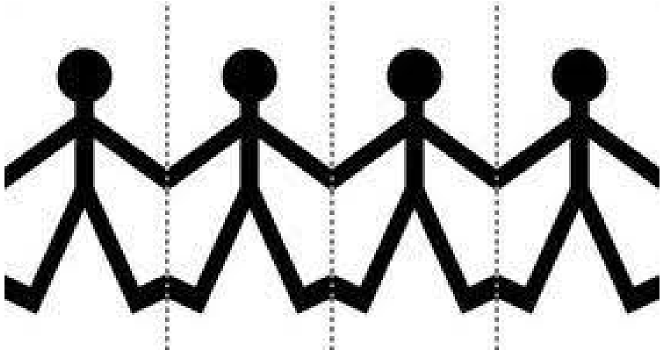


Imagem retirada de http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=13363

E a folha, se a imaginarmos infinita, admite como simetria uma reflexão deslizante.

Imagem retirada de https://pt.dreamstime.com/imagens-de-stock-folhas-na-simetria-image14007944