Matemática (M1029) - Exame - Época Normal - 04/01/2024 **Duração: 180min**

Nome:.. **N.:**..................

Este exame está divido em 3 partes. Cada parte corresponde a um mini-teste e pode ser substituida pelo miniteste. Caso decida fazer uma parte, a nota final será sempre a melhor entre a nota obtida nessa parte neste exame e no teste correspondente.

Os telemóveis têm de estar desligados.
Não serão corrigidas respostas escritas a lápis.

Parte I - Esta parte vale 6 valores - Corresponde ao primeiro teste
Uma possível Resolução

1. Considere o ponto A de coordenadas $(1,2)$ e o ponto B de coordenadas $(3,4)$. Indique:

   (a) (0.75 valores) uma equação da recta que passa por A e por B.

   (b) (0.75 valores) uma equação da recta que passa por A e é perpendicular á recta que passa pelos pontos A e B.

   (c) (0.75 valores) uma equação da circunferência cujo diâmetro é o segmento AB.

   (d) (0.75 valores) Indique todos os pontos no eixo dos y's equidistantes de A e de B.

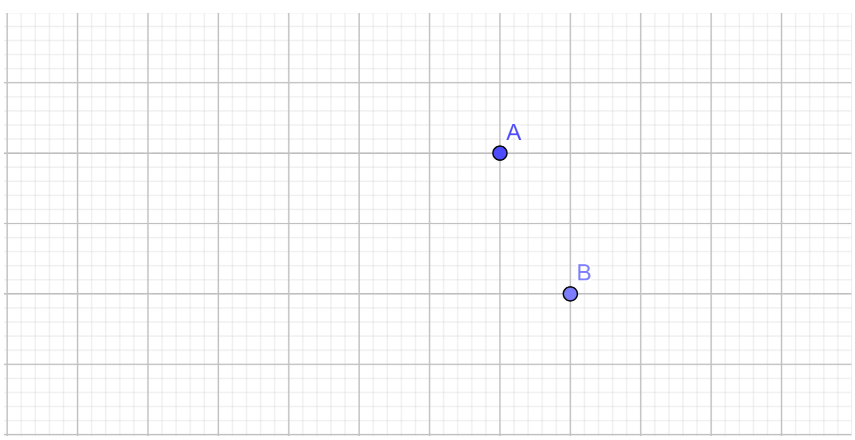
   (a) $m = \frac{4-2}{3-1} = 1$, assim a recta que passa pelos pontos A e B tem declive 1, logo $y = x + b$. Para determinarmos b fazemos com que um dos pontos pertença à recta, assim por exemplo $2 = 1 + b$, logo $b = 1$.

   (b) Dada uma recta de declive m, qualquer recta perpendicular terá declive $-\frac{1}{m}$. Neste caso a recta pretendida terá declive -1, logo a recta pretendida terá equação $y = -x + d$, para algum d. Como A é um ponto da recta, $2 = -1 + d$, isto é a recta tem equação $y = -x + 3$

   (c) O ponto médio do segmento AB é $(\frac{3+1}{2}, \frac{4+2}{2}) = (2,3)$, e o comprimento do segmento é $\sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$, logo a circunferência cujo diâmetro é o segmento AB tem equação $(x-2)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

   (d) Os pontos do eixo dos y's são da forma $(0,y)$. Procuramos assim os pontos que satisfazem a equação:
   $$d((0,y),(1,2)) = d((0,y),(3,4))$$
   assim $\sqrt{1^2 + (y-2)^2} = \sqrt{9 + (y-4)^2}$. Temos então que $1 + y^2 - 4y + 4 = 9 + y^2 - 8y + 16$, logo $y = 5$ e o ponto que procuramos é $(0,5)$.

2. (0.75 valores) Considere os pontos A e B assinalados abaixo num referencial ortonormado. Indique o declive da recta que passa pelos dois pontos.



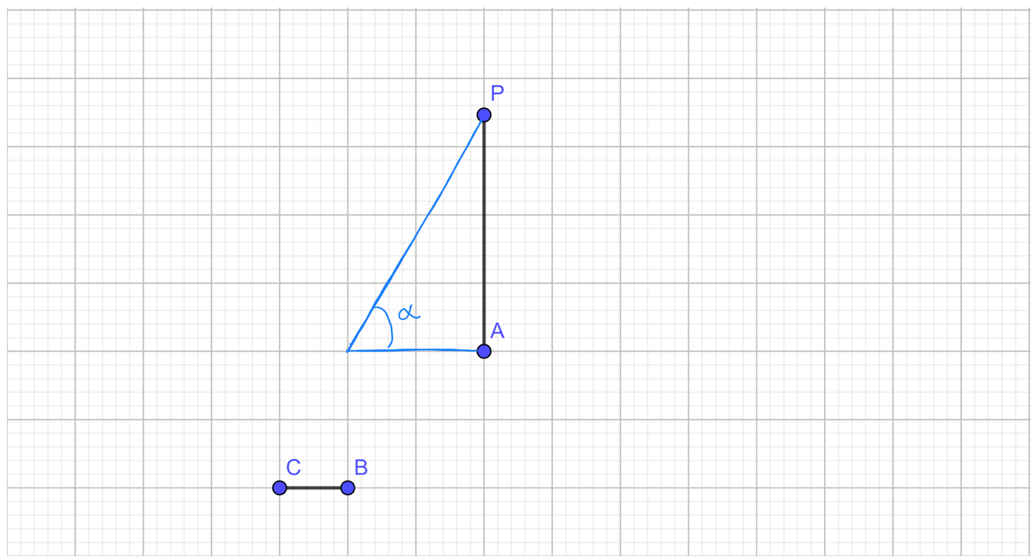
   Uma vez que o declive é dado, uma vez fixado dois pontos (distintos) na recta, pelo quociente entre a diferença das ordenadas pela diferença das abcissas (pela mesma ordem), o declive da recta que passa pelos dois pontos acima é -2.

3. (0.75 valores) Indique uma recta perpendicular ao plano de equação $x+y-3z=4$ que contém o ponto $(1,1,-3)$.

   Sabemos que $(1,1,-3)$ é um vector perpendicular ao plano dado. Assim a recta que passa pelo ponto $(1,1,-3)$ e é perpendicular ao plano dado tem equação

$$(x,y,z) = (1,1,-3) + k(1,1,-3), k \in \mathbb{R}.$$

4. (0.75 valores) Utilizando o quadriculado abaixo e sabendo que o comprimento do segmento de recta AP é $2\sqrt{3}$ e que o do segmento BC é 1, desenhe um ângulo de 60^o.



   Como $tg(60^0) = \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$, o ângulo é o ângulo α indicado acima.

5. (0.75 valores) Calcule $\text{sen}(\alpha - \beta)$ sabendo que α e β são ângulos do $3^{\underline{0}}$ e do $4^{\underline{0}}$ quadrantes, respetivamente, e que $\cos(3\pi + \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \frac{1}{2}$.

   Uma vez que $\frac{\sqrt{5}}{5} = \cos(3\pi + \alpha) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$, obtemos $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Como $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ e α é um ângulo do terceiro quadrante (portanto o seu seno será negativo), $\sin(\alpha) = -\sqrt{1 - \frac{5}{25}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

   Como $\frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{2} + \beta) = -\sin(\beta), \sin(\beta) = -\frac{1}{2}$. Pela formula fundamental da trignometria e tendo em conta que β é um ângulo do $4^{\underline{0}}$ quadrante, conclui-se que $\cos(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Temos então $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{2\sqrt{15}+\sqrt{5}}{10}$.

Matemática (M1029) - Exame - Época Normal - parte II - 04/01/2024

Nome: .... **N.:**..................

Parte II - Esta parte vale 7 valores - Corresponde ao segundo teste

1. Complete de forma a obter afirmações verdadeiras

   (a) (0.5+0.5 valores)

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+1) = \sum_{j=2}^{\boxed{n-1}} \boxed{(2j-1)}$$

   (b) (0.5 valores)

$$\sum_{i=0}^{98}(i+2)^2 - \sum_{i=0}^{98} i^2 = \boxed{19800}$$

   (Nota: nesta alinea tem de introduzir na caixa um número)

2. (0.75+0.75 valores) Determine

   (a) $\arcsin(\cos(\frac{7\pi}{4}))$

   Uma vez que $\cos(\frac{7\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arcsin(\cos(\frac{7\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}$

   (b) $2\arcsin(\frac{2}{3}) - \arccos(\frac{1}{9})$

   (Sugestão: comece por calcular $\sin\left(2\arcsin(\frac{2}{3}) - \arccos(\frac{1}{9})\right)$)

   Se $\alpha = \arcsin(\frac{2}{3}), \sin(\alpha) = \frac{2}{3}$ e α é um ângulo do primeiro quadrante. Uma vez que $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

   Se $\beta = \arccos(\frac{1}{9}), \cos(\beta) = \frac{1}{9}$, β é um ângulo do primeiro quadrante e $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{80}}{9}$.

   Assim

$$\begin{aligned}
\sin\left(2\arcsin(\frac{2}{3}) - \arccos(\frac{1}{9})\right) = \sin(2\alpha - \beta) &= \sin(2\alpha)\cos(\beta) - \cos(2\alpha)\sin(\beta) \\
&= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(\beta) - (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))\sin(\beta) \\
&= 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{1}{9} - \left(\frac{5}{9} - \frac{4}{9}\right) \cdot \frac{\sqrt{80}}{9} \\
&= 0
\end{aligned}$$

   concluindo-se que $2\arcsin(\frac{2}{3}) - \arccos(\frac{1}{9}) = 0$.

3. (1 valor) Uma fábrica tem 2 grupos de trabalhadores, o grupo A e o grupo B. O salário médio mensal do grupo A é de 840 euros e o do grupo B de 1040 euros.

   (a) Se um terço dos trabalhadores for do grupo A, qual é o salário médio mensal da fábrica?

   (b) Se a média dos salários mensais pagos na fábrica for 1000 euros, qual a percentagem de trabalhadores de cada grupo?

(a) Como $\frac{1}{3} \cdot 840 + \frac{2}{3} \cdot 1040 \simeq 973.3(3)$, o salário médio mensal é aproximadamente 973.3(3).

(b) Se n for o número total de trabalhadores, $n = \#A + \#B$. Seja $k = \frac{\#A}{n}$. Assim $\frac{\#B}{n} = 1 - k$. Se $k(840) - (1-k)1040 = 1000$ então $k = 0.2$ e assim 20% dos trabalhadores são do grupo (A) e 80% do grupo (B).

4. (3 valores) Os dados relativos à temperatura máxima num dado jardim em alguns dias de Agosto e o número de gelados vendidos nesses dias é apresentado no seguinte quadro

Temperatura máxima	26	32	34	25	W	24	27
Número de gelados vendidos	82	150	160	80	100	86	98

   (a) (0.5 valores) Sabendo que a média das temperaturas é 28 graus, determine W.

   (b) (0.5 valores) Determine a média de gelados vendidos.

   (c) (1.5 valores) Determine uma equação da recta de regressão.
   (Note que $26^2 + 32^2 + 34^2 + 25^2 + W^2 + 24^2 + 27^2 = 5570$ e que
   $26 * 82 + 32 * 150 + 34 * 160 + 25 * 80 + W * 100 + 24 * 86 + 27 * 98 = 21882$)

   (d) (0.5 valores) Qual será o número esperado de gelados vendido num dia em que a temperatura é de 29 graus.

(a) Como $\frac{26+32+34+25+W+24+27}{7} = 28$, $W = 28$.

(b) $\frac{82+150+160+80+100+86+98}{7} = 108$.

(c) O declive da recta de regressão é dado por

$$\frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2}$$

Como

$$\overline{XY} = \frac{21882}{7} = 3126, \overline{X} = 28, \overline{Y} = 108, \overline{X^2} = \frac{5570}{7} \simeq 795.71$$

temos que o declive da recta é aproximdamente $\frac{102}{11{,}71} \simeq 8.71$. Assim a recta terá equação

$$y = 108 + 8.71(x - 28)$$

.

(d) Num dia em temperatura for de 29 graus, o valor esperado de gelados vendidos será $108 + 8.71(29 - 28)$, isto é aproximadamente 117 gelados.

Matemática (M1029) - Exame Epoca Normal- parte III - 04/01/2024 (A)

Nome:. . . . . **N.:**.................

Parte III - Esta parte tem a cotação de 7 valores - Corresponde ao terceiro teste

1. (1 valor) Indique, na forma de intervalo, o domínio da função cuja expressão é

$$f(x) = \log_2(x+2).$$

$D_f = \{x : x+2 > 0\} =]-2, +\infty[.$

2. (0.5+0.5+0.5+0.5 valores) Complete

$\log_{27} 3 =$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$4^{\log_2 \pi} =$	$\boxed{\pi^2}$
$\log_3(\frac{1}{9}) =$	$\boxed{-2}$	$\log_4(2^{2\pi}) =$	$\boxed{\pi}$

3. (1 valor) Resolva

$$\frac{1-\log_3(x)}{x^2} > 0.$$

(Indique o raciocinio)

Se x for tal que

$$\frac{1-\log_3(x)}{x^2} > 0$$

$x > 0$ já que $\log_3(x)$ tem de estar definido e $1-\log_3(x) > 0$ (já que $x^2 > 0$). Assim,

$$1-\log_3(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge \log_3(x) < 1 \Leftrightarrow x > 0 \wedge \log_3(x) < \log_3 3 \Leftrightarrow x \in]0, 3[.$$

4. (0.75 valores) Indique os pontos em que a recta tangente ao gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 2$ é paralela à recta de equação

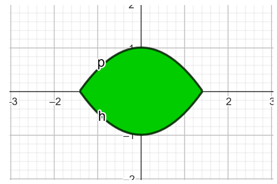
$$4x - y = 2.$$

Uma vez que a $f'(x)$ nos dá o declive da recta tangente ao gráfico da função no ponto $(x, f(x))$ e o declive da recta dada é 4, teremos de encontrar o(s) x tal (tais que) $f'(x) = 4$, isto é $2x = 4$, portanto existe apenas um ponto, o ponto $(2, 6)$, em que a recta tangente ao gráfico de f é paralela à recta dada.

Considere as funções

5. $$\begin{array}{rcl} p : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{2}x^2 + 1 \end{array},$$

$$\begin{array}{rcl} h : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}x^2 - 1 \end{array}.$$



(a) (0.75 valores) Determine a área limitada pelos dois gráficos.

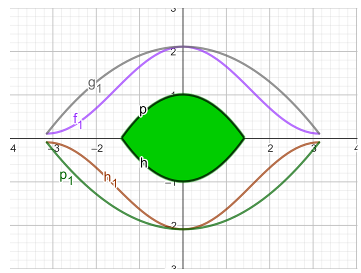
Uma vez que no intervalo $[\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$ $p(x) = -h(x)$, existe uma simetria dada relativamente ao eixo dos xx's, assim a área a verde é

$$2\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-\frac{1}{2}x^2 + 1)dx = 2\left[-\frac{1}{6}x^3 + x\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 2[-\frac{1}{6}2\sqrt{2} + \sqrt{2} - (\frac{1}{6}2\sqrt{2} - \sqrt{2})] = \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

(b) (0.75 valores) Considere as funções

$$\begin{array}{rcl} g_1 : [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{2}{\pi^2}x^2 + 2.1 \end{array},$$

$$\begin{array}{rcl} f_1 : [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) + 1.1 \end{array}.$$

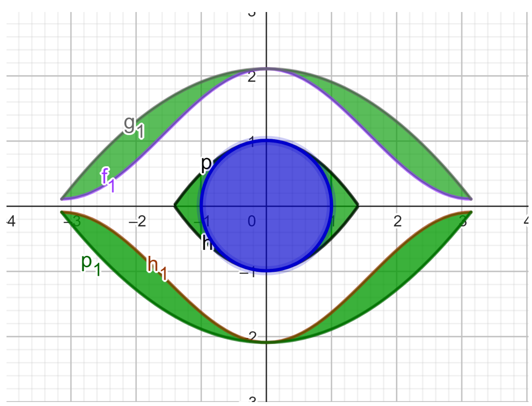


Indique as funções h_1 e p_1 de forma que os seus gráficos sejam simétricos ao das funções f_1, g_1 relativamente ao eixo dos $x's$.

$$\begin{array}{rcl} p_1 : [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{\pi^2}x^2 - 2.1 \end{array},$$

$$\begin{array}{rcl} h_1 : [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\cos(x) - 1.1 \end{array}.$$

(c) (0.75 valores) Com os gráficos acima e com a circunferência de raio 1 e centro $(0, 0)$ formamos a imagem



Indique o valor da área a verde.

Tendo em conta a simetria indicada em (b), sabemos que a área a verde na parte mais exterior da figura será 2 vezes a area delimitada pelas funções g_1 e f_1 para $x \in [-\pi, \pi]$, isto é

$$2\left(\int_{-\pi}^{\pi} (-\frac{2}{\pi^2}x^2 + 2.1)dx - \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x) + 1.1)dx\right) = 2\left([-\frac{2}{3\pi^2}x^3 + 2.1x]_{-\pi}^{\pi} - [\sin(x) + 1.1x]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{4}{3}\pi$$

Tendo em conta que a parte verde interior é figuar que se obtém da primeira retiranto um circulo (a azul), a área total é $\frac{8}{3}\pi + \frac{8}{3}\sqrt{2} - \pi$ unidades de área.