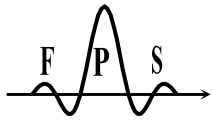


Sumário

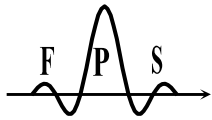
- *Cálculo da Convolução Linear através da Convolução Circular*
 - *motivação*
 - *relação entre convolução linear e convolução circular*
 - *a convolução linear entre duas sequências finitas*
 - *condição para a identidade entre a convolução linear e a circular*
 - *realização da convolução linear usando DFTs*
 - *motivação*
 - *convolução entre duas sequências de comprimento finito*
 - *caso em que uma das sequências é de comprimento infinito*
 - *o algoritmo “overlap-add”*
 - *o algoritmo “overlap-save”*



Convolução Linear através da Convolução Circular

- Motivação

- a caracterização de um sinal por amostras, quer em n (o que é possível pela amostragem de um sinal contínuo de banda limitada), quer na frequência (o que é possível pela amostragem da transformada de Fourier de um sinal discreto de comprimento limitado), é desejável do ponto de vista computacional (porquê ?),
- há algoritmos rápidos (FFT, como já visto), que calculam a DFT de forma eficiente,
- há um grande número de aplicações de processamento digital de sinal que recorre à convolução linear (e.g., na codificação de voz operada nos telefones celulares),
- sendo $x_1[n]$ e $x_2[n]$ duas sequências discretas finitas e $X_1[k]$ e $X_2[k]$ a sua DFT (com o mesmo comprimento !), o produto $X_1[k]X_2[k]$ é computacionalmente fácil de avaliar, correspondendo à convolução circular de $x_1[n]$ com $x_2[n]$, e tem um interesse prático enorme já que (como ilustrado na aula anterior) é possível proceder de forma que a convolução circular produza o mesmo resultado que a convolução linear.



Relação entre Convolução Linear e Convolução Circular

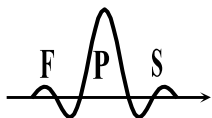
- Os exemplos vistos na aula anterior revelam que é possível obter para a convolução circular, um resultado idêntico ao que seria obtido pela convolução linear. Importa pois esclarecer em que condições tal se verifica.
- Convolução Linear entre duas sequências finitas
 - sejam as sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$ de comprimento L e P, respectivamente, que sem perda de generalidade, admitimos serem causais:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1[n] \\ x_2[n] \end{array} \right\} \xleftrightarrow{Z} \left\{ \begin{array}{l} X_1(z) = \sum_{n=0}^{L-1} x_1[n] Z^{-n} \\ X_2(z) = \sum_{n=0}^{P-1} x_2[n] Z^{-n} \end{array} \right.$$

será então para a sua convolução linear:

$$\boxed{x_3[n] = x_1[n] * x_2[n]} \xleftrightarrow{Z} \boxed{X_3(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) = \sum_{\ell=0}^{L+P-2} x_3[\ell] Z^{-\ell}}$$

→ o que traduz uma conclusão já conhecida: **o comprimento máximo** da sequência $x_3[n]$ é: **L+P-1**.



Relação entre Convolução Linear e Convolução Circular

Questão: sendo $x_1[n]$ uma sequência finita de comprimento L , e $x_2[n]$ uma outra sequência finita de comprimento P , como se compara o resultado da convolução linear $x_3[n]=x_1[n]*x_2[n]$ com o da convolução circular $x_{3p}[n]=x_1[n]\otimes x_2[n]$?

- Convolução Linear

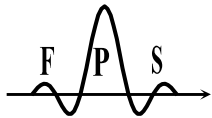
$$\boxed{x_3[n] = x_1[n] * x_2[n]} \xleftrightarrow{F} \boxed{X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})}$$

o comprimento da sequência $x_3[n]$ é, como vimos, $L+P-1$.

- Convolução Circular

supondo agora que se acrescenta um número adequado de amostras nulas à sequência mais curta, formamos a partir de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ duas sequências periódicas de comprimento N [$N \geq \mathbf{MAX(L, P)}$], resultando a seguinte análise:

$$\boxed{X_3[k] = X_1[k] \cdot X_2[k] = X_1\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right) \cdot X_2\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right), \quad 0 \leq k \leq N-1}$$



Condição para Identidade entre Conv. Linear e a Circular

→ Pela relação de Fourier, esta análise corresponde à convolução circular entre as duas sequências periódicas: $x_3[(n)_N] = x_1[(n)_N] \otimes x_2[(n)_N]$ mas sabe-se também que:

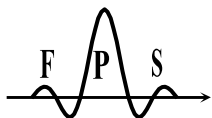
$$\boxed{X_3[(k)_N] = X_3\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right)} \xleftrightarrow{\text{F}} \boxed{x_3[(n)_N] = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_3[n - \ell N]}$$

pelo que se conclui que o resultado da convolução circular pode ser expresso em função do resultado da convolução linear:

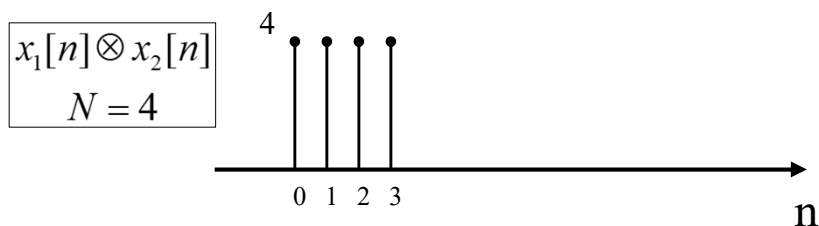
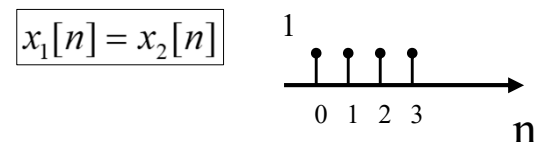
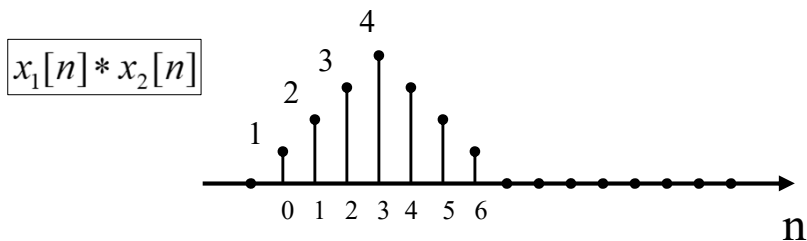
$$x_{3p}[n] = \begin{cases} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_3[n - \ell N], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{outros } n \end{cases} = \begin{cases} x_3[n] + \sum_{\substack{\ell=-\infty \\ \ell \neq 0}}^{+\infty} x_3[n - \ell N], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{outros } n \end{cases}$$

Concretamente, o resultado da convolução circular é igual ao resultado da convolução linear mais um número infinito de termos de “aliasing” em n (os correspondentes a $\ell \neq 0$ no somatório anterior), também designado de “aliasing” temporal.

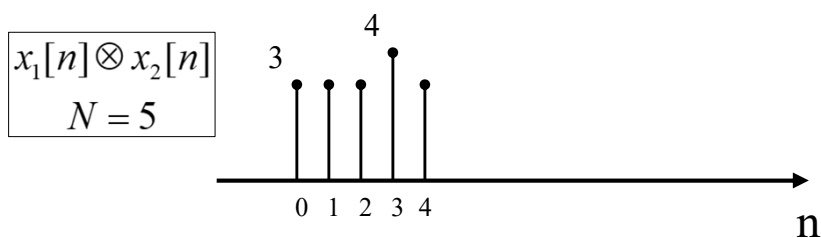
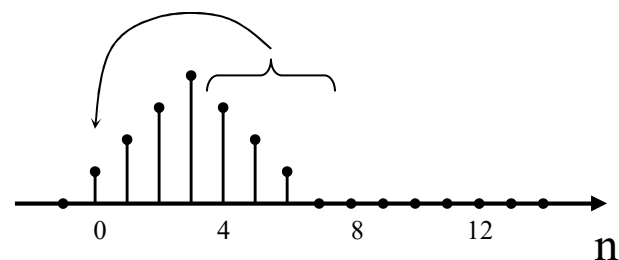
→ resulta assim claro que o **resultado da convolução circular** só será **igual** ao da **convolução linear** se os termos de ‘aliasing’ forem nulos para $0 \leq n \leq N-1$, o que só se verifica se N igualar ou exceder o comprimento de $x_3[n]$, ou seja, se **$N \geq L+P-1$** .



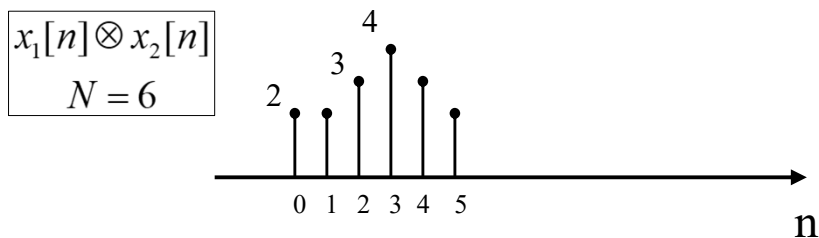
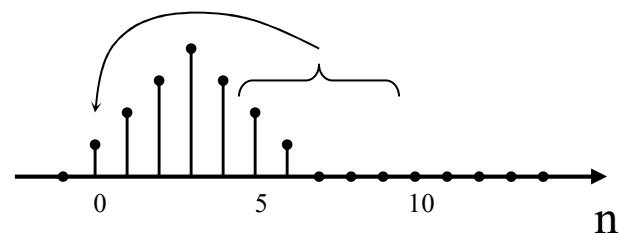
Exemplo: sendo $x_1[n]$ e $x_2[n]$ duas sequências unitárias de comprimento 4, ilustram-se os resultados da convolução linear e também circular para N entre 4 e 7. Em cada caso identifica-se o efeito de 'aliasing' associado.



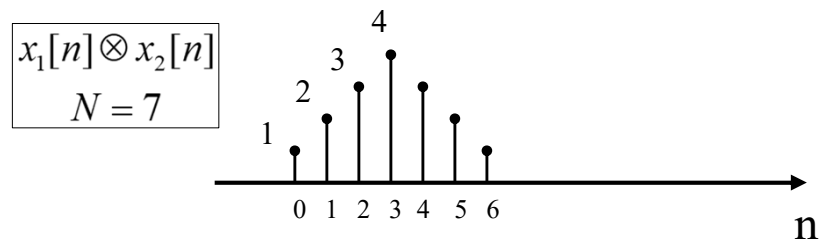
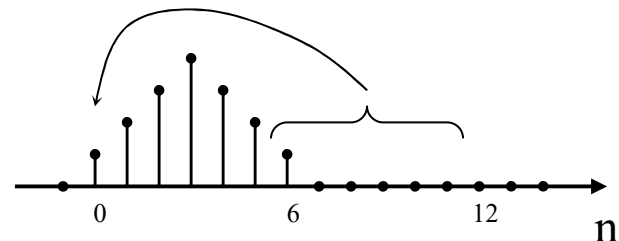
$\equiv$



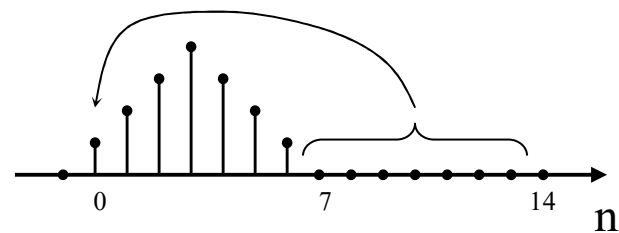
$\equiv$

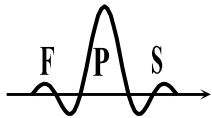


$\equiv$



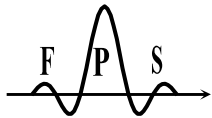
$\equiv$





Condição para Identidade entre Conv. Linear e a Circular

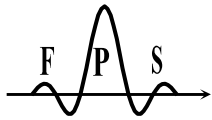
→ Conclui-se deste exemplo que o ‘aliasing’ resultante da convolução circular consiste em enrolar o resultado da convolução linear sobre si próprio.



Realização da Convolução Linear usando DFTs

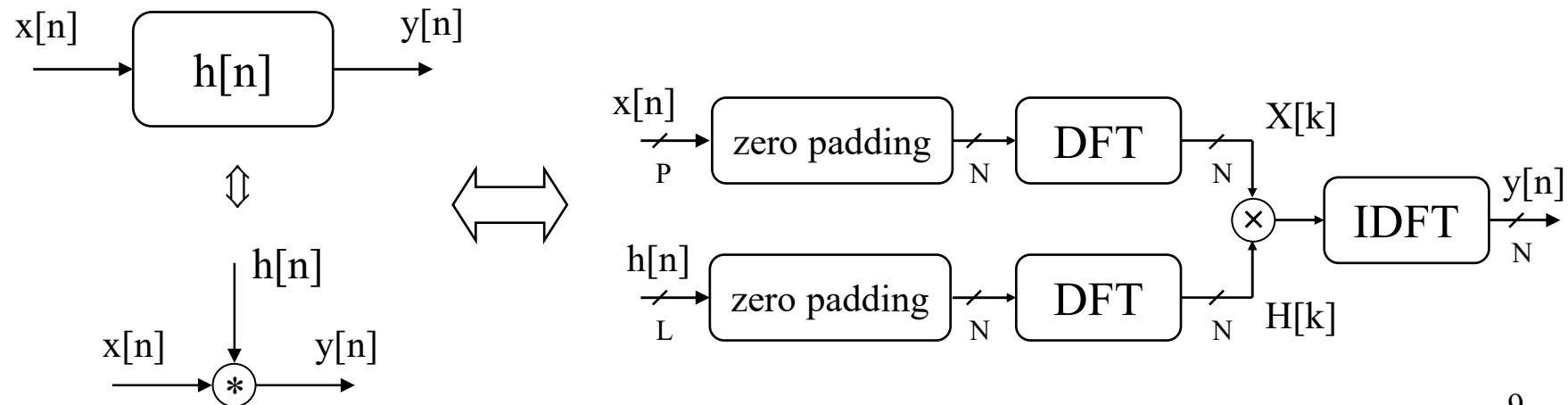
- Motivação

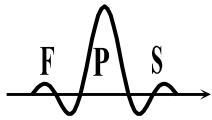
- A convolução linear entre duas sequências finitas pode ser calculada através da convolução circular, usando DFTs com comprimento apropriado,
- Usando algoritmos rápidos para o cálculo da DFT (já estudados nas aulas anteriores) pode ser mais eficiente calcular a convolução usando DFTs do que efectuar o cálculo directo da convolução em n (isto é aplicável mesmo a filtros FIR com resposta impulsional tão curta quanto com cerca de 30 coeficientes),
- A convolução linear entre uma sequência finita (*e.g.*, a resposta impulsional de um sistema FIR) e uma outra infinita (*e.g.*, um sinal de fala à entrada de um filtro FIR), pode ser também realizada usando DFTs, mas efectuando os cálculos por blocos que resultam de uma segmentação adequada da sequência de comprimento infinito,
- Simultaneamente com o cálculo da convolução linear usando DFTs, pode ser realizada uma estimação espectral servindo algum objectivo de análise dos sinais que intervêm na convolução linear.



Realização da Convolução Linear usando DFTs

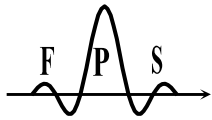
- Convolução linear entre duas sequências de comprimento finito
 - sendo $h[n]$ de comprimento L , e $x[n]$ de comprimento P , a sua convolução linear produz um sinal $y[n]$ de comprimento $L+P-1$,
 - realizando a convolução linear através de DFTs, os sinais $h[n]$ e $x[n]$ deverão ser previamente aumentados com amostras nulas até atingirem o comprimento mínimo de $N=L+P-1$, este processo é designado na gíria por “zero padding”,
 - na condição de $N \geq L+P-1$, a seguinte equivalência de sistemas pode ser estabelecida:





Realização da Convolução Linear usando DFTs

- Convolução linear entre sequência finita e outra sequência infinita
 - sendo $h[n]$ de comprimento L , e $x[n]$ uma sequência de comprimento indeterminado, pode-se usar repetidamente a técnica anterior efectuando uma segmentação em blocos finitos de comprimento P do sinal $x[n]$, e tirando partido da propriedade da linearidade da convolução:
 - efectua-se em primeiro lugar a convolução respeitante a cada bloco (isto é, com base em pequenas secções do sinal),
 - combinam-se depois os resultados das várias convoluções de bloco para produzir a saída desejada.
 - usando esta técnica, há basicamente dois tipos de procedimento para a segmentação (isto é, de seccionamento) do sinal de comprimento infinito e a combinação dos resultados de cada convolução de bloco:
 - algoritmo de “overlap-add”,
 - algoritmo de “overlap-save”.



Realização da Convolução Linear usando DFTs

- Algoritmo de *overlap-add*
 - em primeiro lugar, segmenta-se o sinal $x[n]$ em blocos contíguos $x_b[n]$ de comprimento P amostras, de modo que:

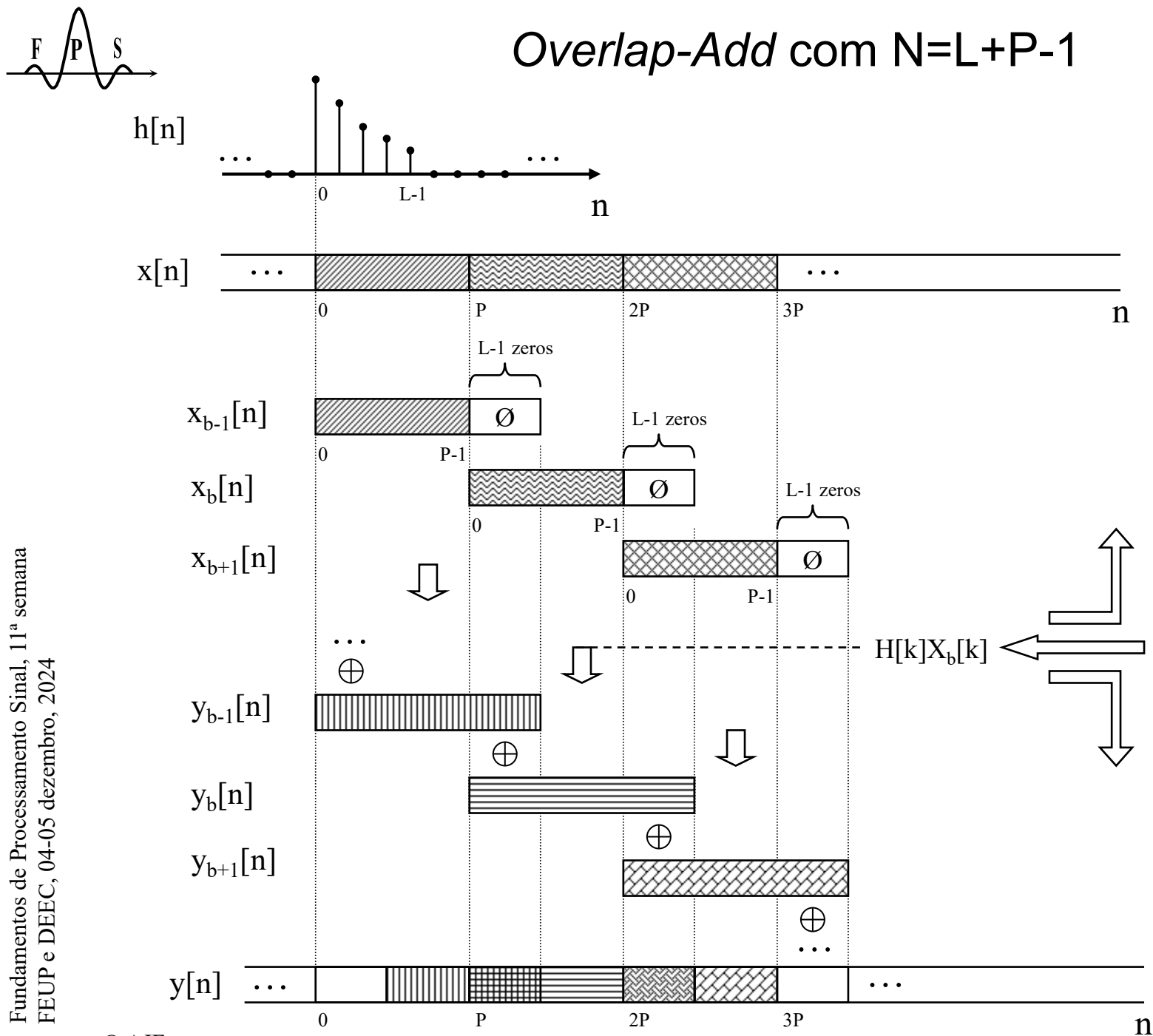
$$x[n] = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} x_b[n - bP]$$

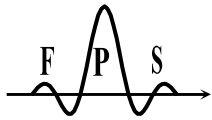
com:
$$x_b[n] = \begin{cases} x[n + bP], & 0 \leq n \leq P - 1 \\ 0, & \text{outros } n \end{cases}$$

a saída pretendida é:
$$y[n] = h[n] * x[n] = h[n] * \sum_{b=-\infty}^{+\infty} x_b[n - bP] = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} y_b[n - bP]$$

com:
$$y_b[n] = h[n] * x_b[n]$$

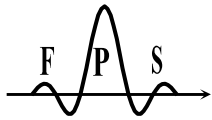
→ sendo $y_b[n]$ a convolução linear do bloco de índice b que, como já vimos, pode ser calculada usando DFTs de comprimento $N \geq L + P - 1$.





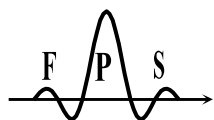
Realização da Convolução Linear usando DFTs

- Particularidades do algoritmo *overlap-add*
 - dado que os blocos são de comprimento P amostras mas o resultado de cada convolução de bloco é de comprimento $L+P-1$ amostras, ao combinar os vários resultados para produzir $y[n]$, deve-se sobrepor e somar (“overlap-and-add”) os resultados adjacentes em $L-1$ amostras (que em princípio são não-nulas),
 - se o sinal $x[n]$ tiver um comprimento total que seja um inteiro múltiplo de P amostras, então, para produzir o resultado final desejado, é suficiente efectuar esse número inteiro de convoluções de bloco.

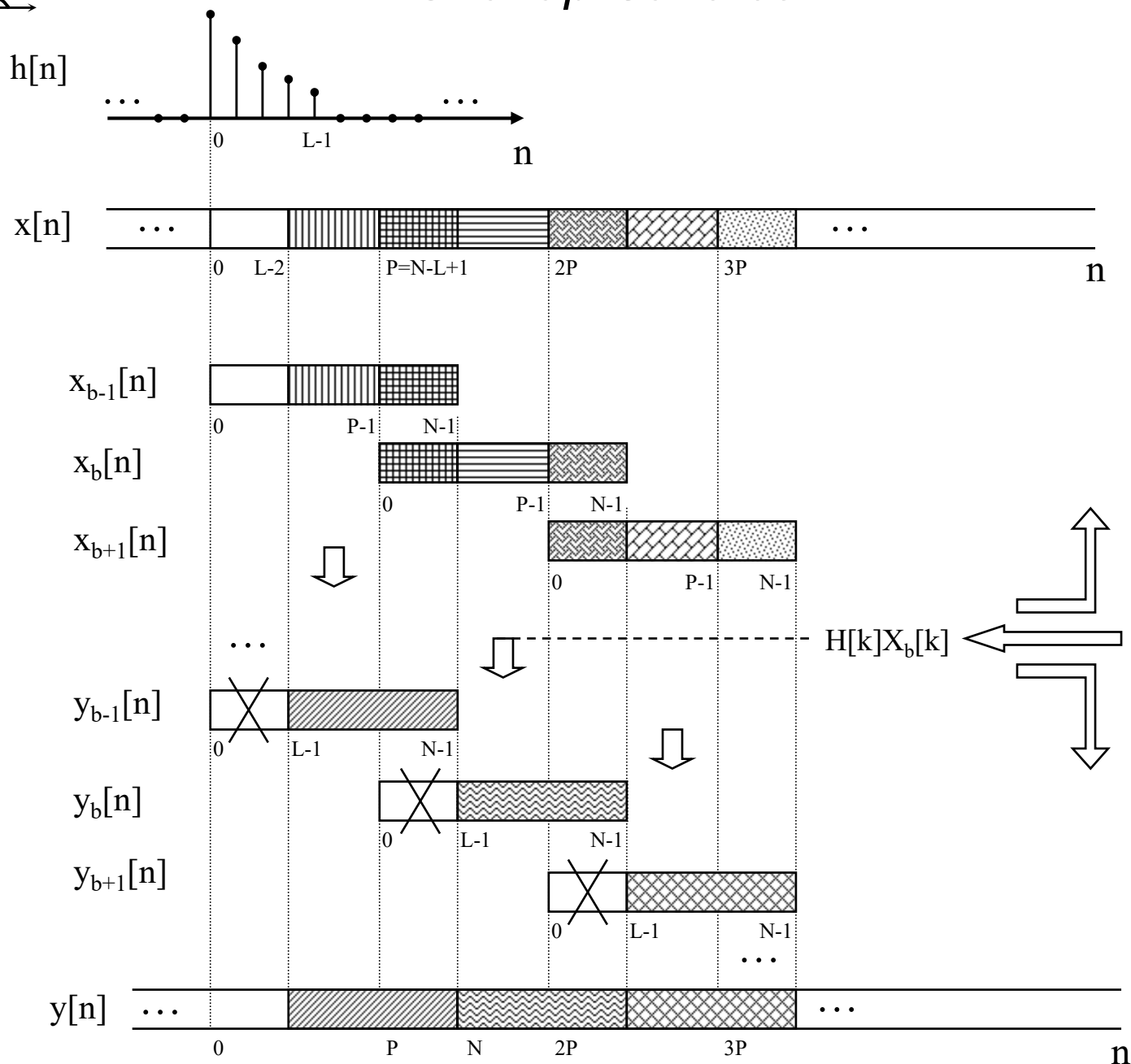


Realização da Convolução Linear usando DFTs

- Algoritmo de *overlap-save*
 - este algoritmo difere do anterior no sentido em que, em vez de efectuar a convolução circular de modo a não haver termos de *aliasing* para além do resultado da convolução linear (e para isso era necessário garantir que $N \geq L+P-1$) aqui permite-se o aparecimento de *aliasing* mas cuja posição no sinal resultante de cada convolução de bloco está bem definida e por isso esse *aliasing* é descartado na construção do sinal $y[n]$,
 - concretamente, mostra-se [Oppenheim, secção 8.7.2] que efectuando a convolução circular em N pontos entre um sinal com L amostras não nulas (com $L < N$) e um outro sinal com N amostras não nulas, resulta que as primeiras $L-1$ amostras da convolução circular contêm termos de *aliasing* para além do termo correspondente à convolução linear, mas que as restantes **$P=N-L+1$** amostras correspondem exactamente, e só, ao resultado pretendido da convolução linear.



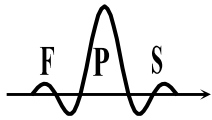
Overlap-Save com $N=L+P-1$



segmentação antes da convolução de bloco

convolução de bloco

combinação dos resultados das várias convoluções de bloco



Realização da Convolução Linear usando DFTs

- Particularidades do algoritmo *overlap-save*
 - os blocos de comprimento N (e parcialmente sobrepostos em $L-1$ amostras) são directamente extraídos do sinal $x[n]$ sem *zero-padding*:

$$x_b[n] = \begin{cases} x[n + b(N - L + 1)], & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{outros } n \end{cases}$$

o que significa que, ao tomar um bloco de N amostras, é necessário guardar as últimas $L-1$ amostras para utilização do bloco seguinte (“overlap-and-save”),

- NOTA: aqui não se verifica a seguinte relação:

$$x[n] = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} x_b[n - b(N - L + 1)]$$

- após a convolução circular de $h[n]$ com $x_b[n]$, obtém-se um resultado ao qual devem ser retiradas as primeiras $L-1$ amostras por conterem *aliasing*, sendo a saída útil da convolução de bloco dada por:

$$y_{bu}[n] = \begin{cases} y_b[n], & L - 1 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{outros } n \end{cases}$$

- dado que os vários blocos $y_{bu}[n]$ não se sobrepõem em n , a saída é formada justapondo-os simplesmente:

$$y[n] = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} y_{bu}[n - b(N - L + 1)]$$

- se o sinal $x[n]$ tiver um comprimento total que seja um inteiro múltiplo de $N-L+1$ amostras, então, para obter o resultado final desejado, é suficiente efectuar esse número inteiro de convoluções de bloco, mais um.