Sumário

- *Técnicas de Projeto de Filtros Discretos (1ª Parte)*
  - *Introdução*
    - *especificação dos filtros*
    - *notas breves sobre filtros contínuos*
  - *Projeto de filtros IIR a partir de filtros contínuos*
    - *o método da invariância da resposta ao impulso*
    - *o método da transformação bilinear*

© AJF

Projeto de Filtros Discretos

- Introdução

  – filtros discretos (que designaremos também, embora de forma não rigorosa, como "filtros digitais") são sistemas discretos que têm alguma característica relevante/desejável de seletividade em frequência, ou outra forma de modificação da representação em frequência do sinal

  – a nossa ênfase será colocada em sistemas (filtros) discretos causais e estáveis

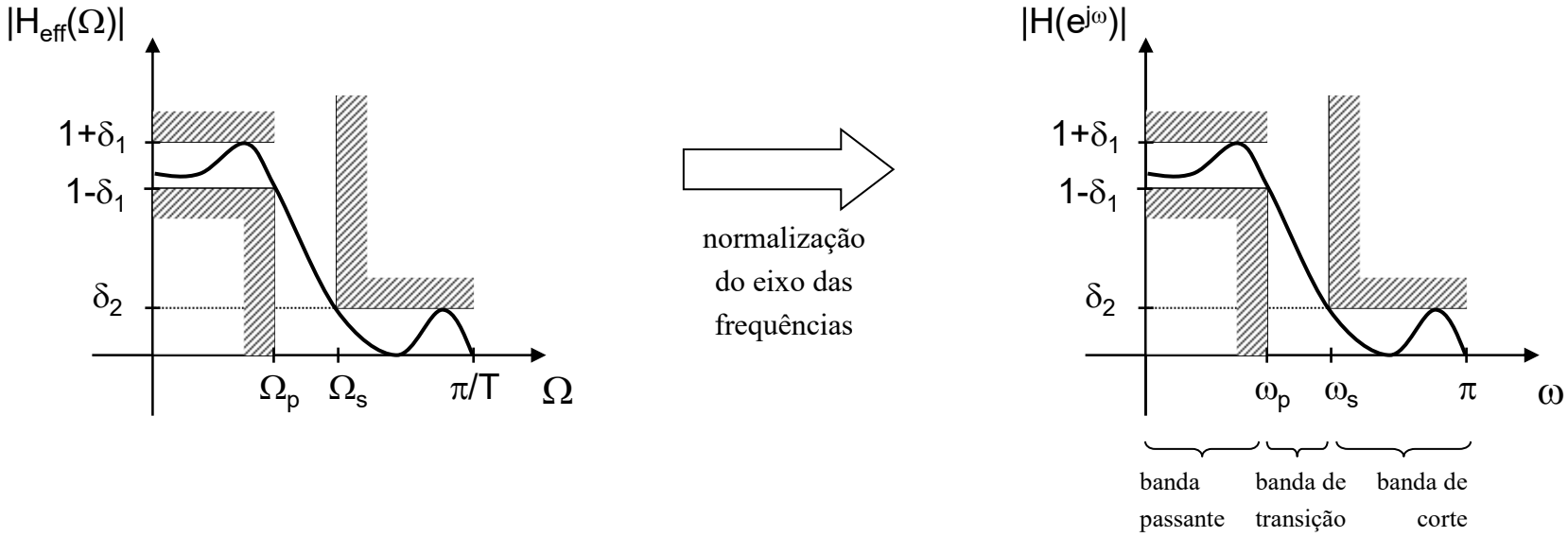
  – dado que os filtros discretos destinam-se frequentemente a operar sobre sinais contínuos depois de amostrados, é comum definirem-se as especificações com relação ao filtro analógico equivalente (*i.e.,* efectivo), cuja projeção nas características do filtro discreto é imediata através da relação $\omega=\Omega T$, presumindo observância dos requisitos de amostragem e reconstrução do sinal, isto é, fazendo:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_{eff}\left(\Omega\right)\Big|_{\Omega=\frac{\omega}{T}} \quad , \quad |\omega| < \pi$$

© AJF

Projeto de Filtros Discretos

- Especificação dos filtros
  - EXEMPLO: especificação das características de um filtro discreto passa-baixo



  - especificação na banda passante: $\left(1-\delta_1\right) \le \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le \left(1+\delta_1\right) \quad , \quad |\omega| \le \omega_p$
    - δ_1 é a tolerância em torno do ganho desejado que tipicamente é unitário
    - NOTA: esta especificação pode ser apresentada na escala logarítmica
  - especificação na banda de corte: $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le \delta_2 \quad , \quad \omega_s \le |\omega| \le \pi$
    - δ_2 é a tolerância em torno do ganho desejado que tipicamente é nulo
    - NOTA: esta especificação pode ser apresentada na escala logarítmica

© AJF

Projeto de Filtros Discretos

→ NOTA: no esboço anterior, a representação entre $\omega=0$ e $\omega=\pi$ presume que sendo h[n] real, a característica $|H(e^{j\omega})|$ é par em relação a $\omega=0$, $\omega=\pi$ e periódica com período 2π.

– os métodos de projeto mais comuns (*i.e.,* convencionais) baseiam-se só no comportamento em magnitude da resposta em frequência do sistema, sendo o seu comportamento em fase:
  - o que decorre naturalmente da condição de causalidade e estabilidade, no caso de um filtro IIR ou FIR genérico
  - do tipo fase linear que pode ser imposto à priori condicionando a resposta ao impulso de um filtro FIR a possuir uma forma de simetria como foi visto em aula anterior

– o problema de projeto de um filtro discreto com uma resposta em frequência sujeita a uma especificação desejada é assim um problema de aproximação de funções:
  - de funções racionais no caso de sistemas do tipo IIR
  - de funções polinomiais no caso de sistemas do tipo FIR

→ em cada caso, os métodos associados de projeto diferem substancialmente, pelo que os analisaremos em separado

© AJF

Notas Breves Sobre Filtros Contínuos

- Filtros de Butterworth do tipo passa-baixo

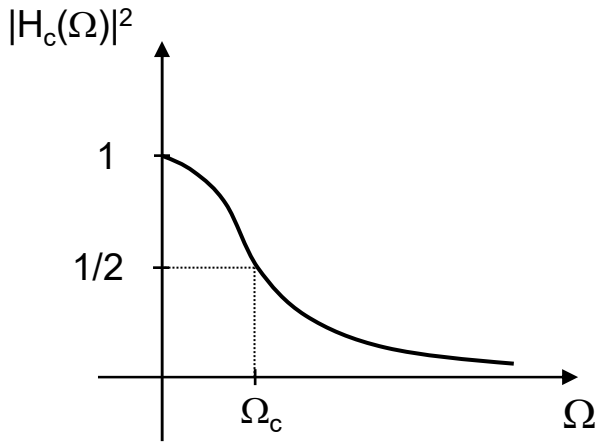
  – a magnitude da sua resposta em frequência é maximamente plana na banda passante (*i.e.,* sendo N a ordem do filtro, as primeiras 2N-1 derivadas da função magnitude quadrada e em Ω=0, são nulas)

  – a magnitude da sua resposta em frequência é monótona decrescente, quer na banda passante, quer na banda de corte

  – a sua função magnitude quadrada é dada por:

$$\left|H_c(\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

em que Ω_c é a frequência de corte, isto é,
a frequência para a qual $20\log|H_c(\Omega_c)| \cong -3$ dB



© AJF

Notas Breves Sobre Filtros Contínuos

– por extensão do resultado anterior, tem-se também:

$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- em que $s=\sigma+j\Omega$ é a variável de frequência do domínio de Laplace

→ este resultado revela que as raízes do denominador situam-se em $s_k=j\Omega_c(-1)^{1/2N}$, ou seja:

$$s_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)} \quad , \quad k = 0, \cdots, 2N-1$$

– o resultado anterior permite também deduzir a função de transferência $H_c(s)$ estável e causal do sistema contínuo (filtro de Butterworth) através de uma factorização de $H_c(s)H_c(-s)$, retendo de todas soluções para s_k, somente as que correspondem a polos situados no semi-plano esquerdo do plano s

- note-se que da expressão resultam 2N raízes
- repare-se também que não resultam das soluções anteriores quaisquer polos situados no eixo imaginário (o que constituiria fonte de ambiguidade)

© AJF

Notas Breves Sobre Filtros Contínuos

– conclui-se da análise anterior que os filtros de Butterworth são completamente caracterizados por dois parâmetros: a sua ordem N e a sua frequência de corte a -3 dB.

- Quanto a outros tipos de filtros

→ há outros tipos de filtros com muito interesse prático [ver Sanjit Mitra - capítulo 5 e também Oppenheim -apêndice B], como por exemplo:

- os filtros de Chebyshev que têm comportamento “equiripple” numa das bandas corte/passante, tornando a sua característica de magnitude mais efetiva (*e.g.,* bandas de transição mais curtas) que a dos filtros de Butterworth,
- os filtros elíticos que têm comportamento “equiripple” nas duas bandas tornando-os os mais eficazes de todos os tipos de filtros do ponto de vista de resposta em magnitude mas exibem, em contrapartida, uma forte distorção de fase,
- os filtros de Bessel que têm a resposta em magnitude mais pobre de todos os tipos de filtros, mas em compensação são os que melhor aproximam a característica de fase linear, sendo muito usados quando este é um requisito importante.

© AJF

Notas Breves Sobre Filtros Contínuos

→ a tabela seguinte resume as diferenças entres os diferentes tipos de filtros quanto à existência ou não de ondulação numa das bandas da característica de magnitude de resposta em frequência, (quando não existe ondulação, a característica é monótona crescente ou decrescente), indica-se também o comando Matlab de projeto de cada tipo de filtro

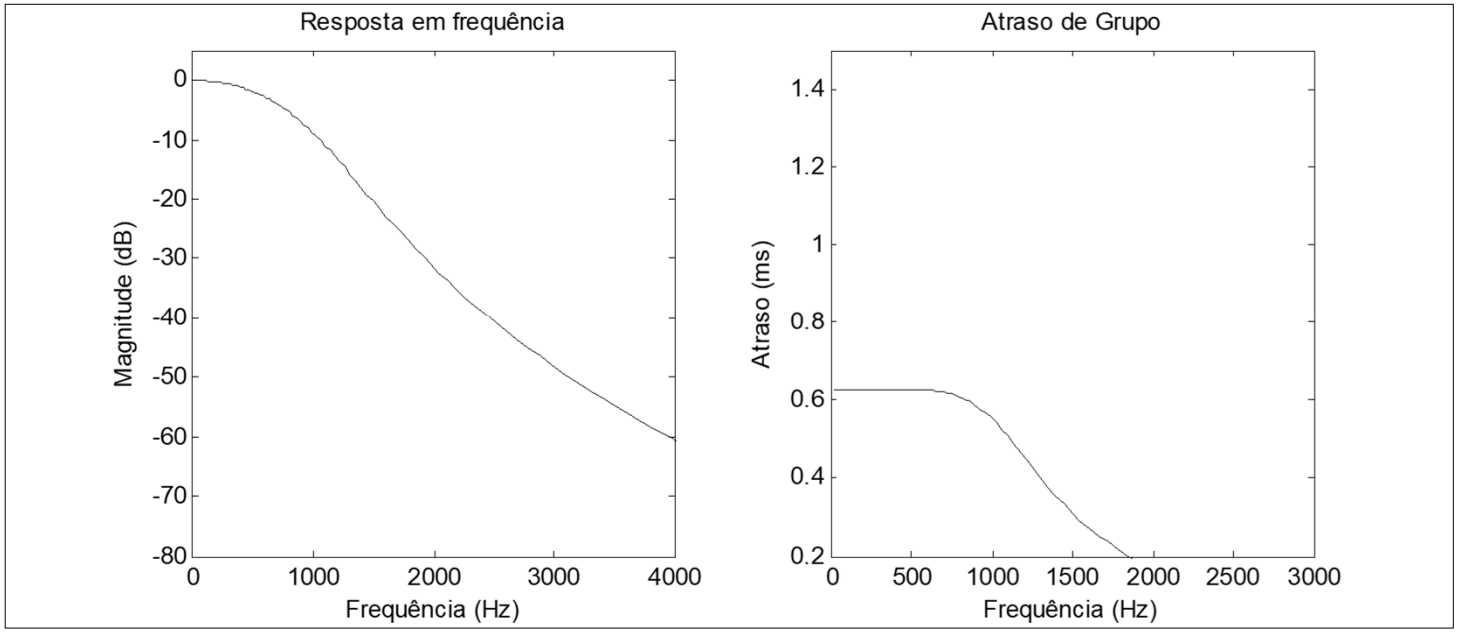
	Banda passante	Banda rejeição	`Matlab`
Bessel	não	não	`besself`
Butterworth	não	não	`butter`
Chebyshev 1	***sim***	não	`cheby1`
Chebyshev 2	não	***sim***	`cheby2`
Eliptico	***sim***	***sim***	`ellip`

→ para um filtro contínuo passa-baixo com uma determinada ordem, esta sequência de tipos de filtros assegura uma atenuação na banda de rejeição mais eficaz, uma banda de transição mais estreita, mas também uma pior característica de atraso de grupo, como se ilustra a seguir (a ordem de cada filtro é 5, frequência de corte é 1000 Hz)

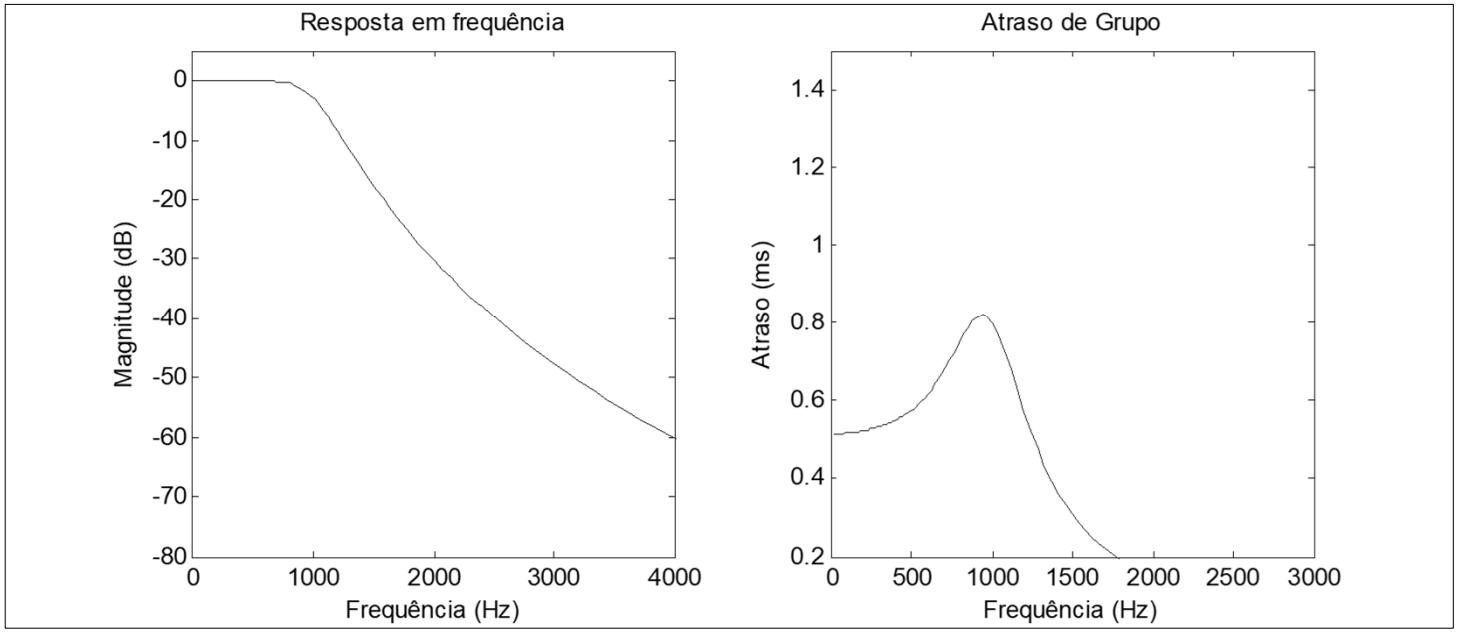
© AJF

Notas Breves Sobre Filtros Contínuos

Bessel



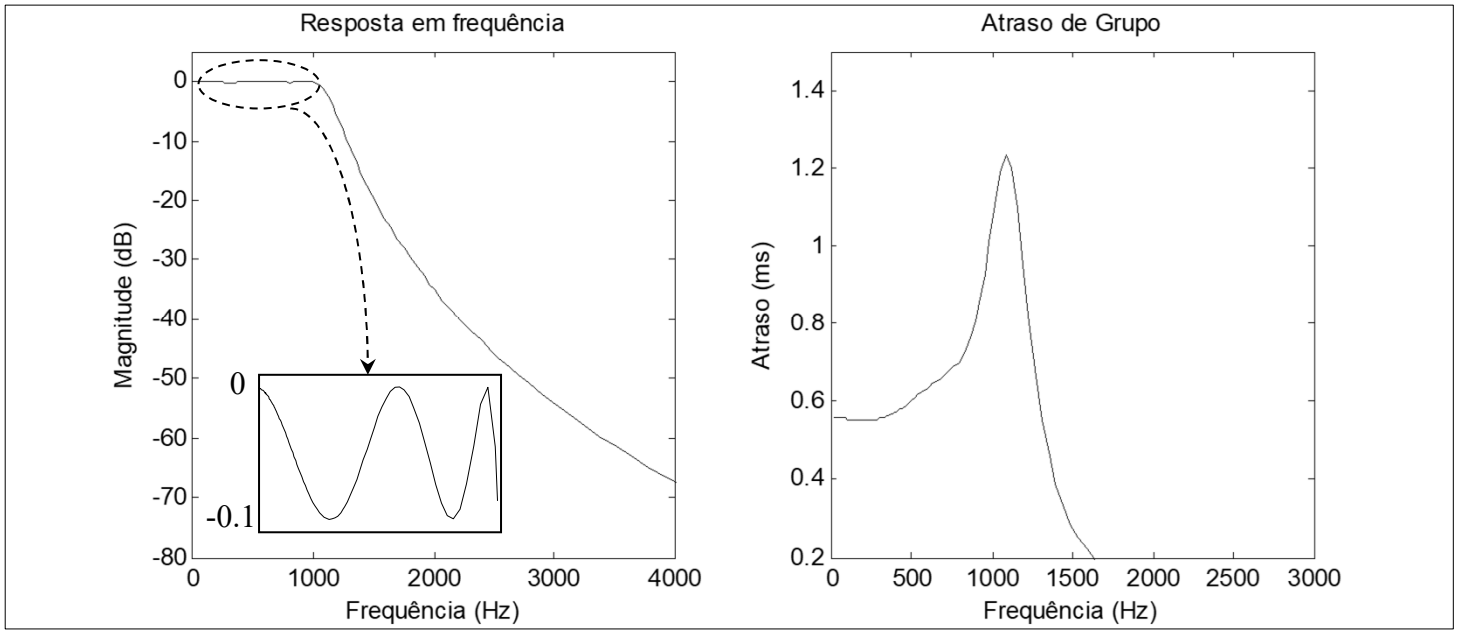
Butterworth



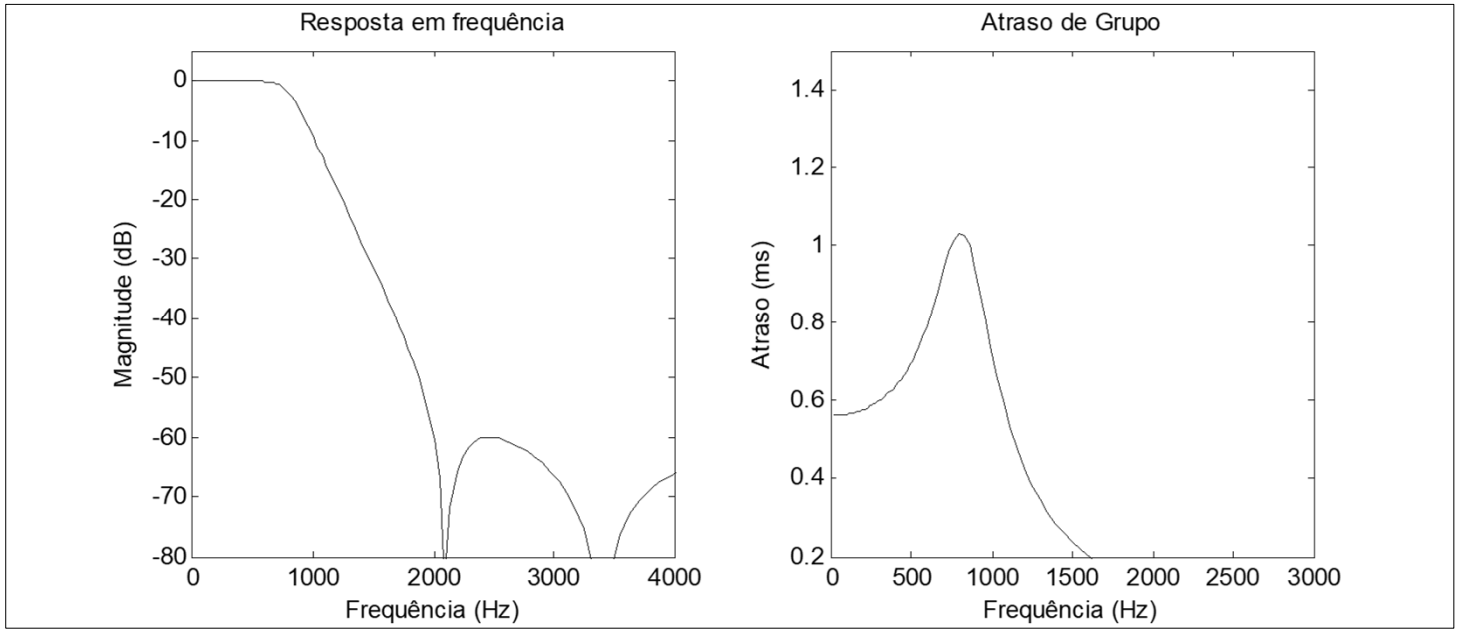
© AJF

Notas Breves Sobre Filtros Contínuos

Chebyshev 1



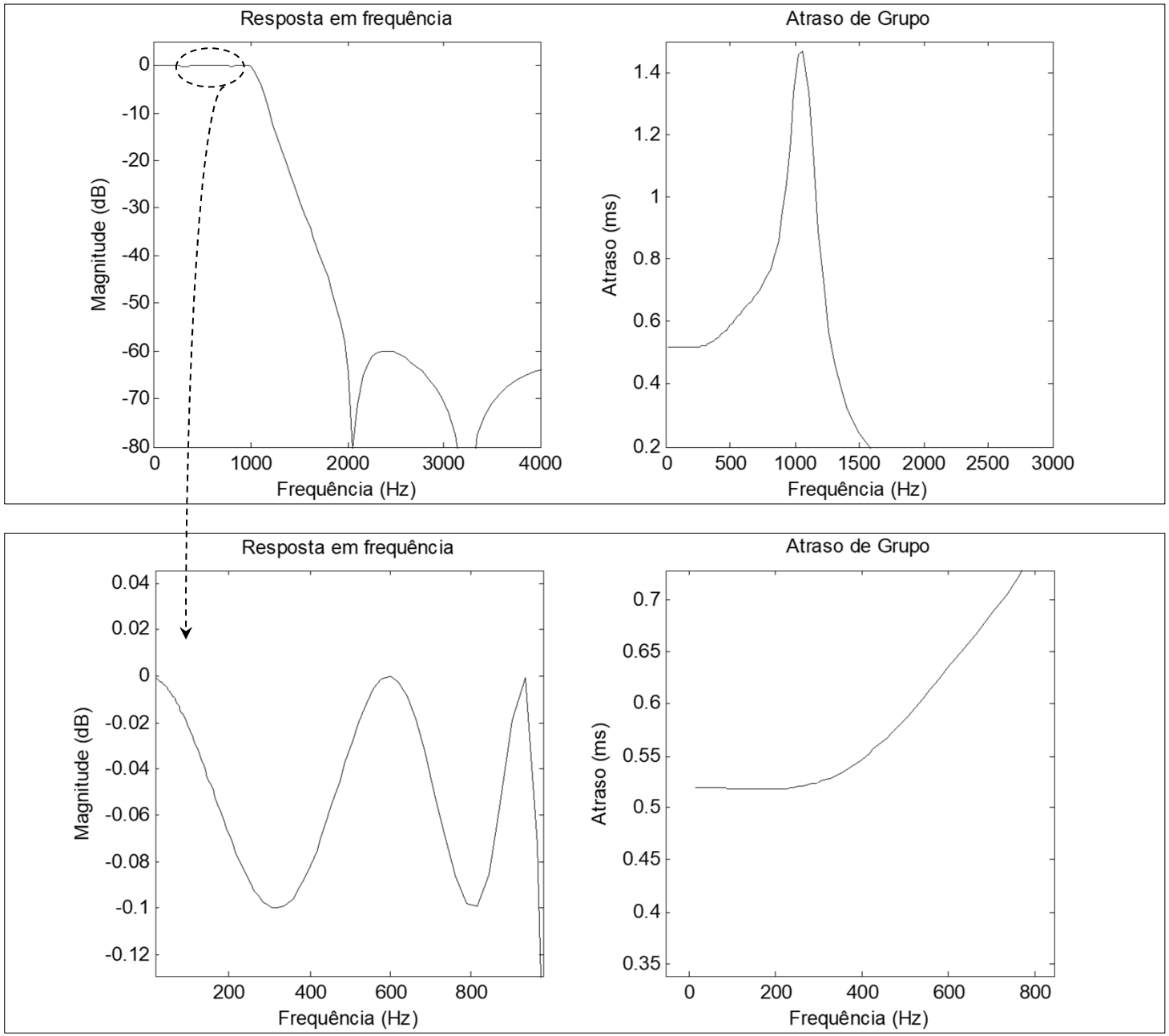
Chebyshev 2



© AJF

Notas Breves Sobre Filtros Contínuos

elítico



© AJF

Projeto de Filtros IIR a partir de Filtros Contínuos

→ uma abordagem clássica no projeto de filtros discretos consiste em projectar em primeiro lugar um filtro contínuo protótipo satisfazendo as especificações (tirando assim partido de métodos e ferramentas existentes para o projeto destes filtros) e fazendo depois uma projeção do filtro contínuo num filtro discreto, nomeadamente através de uma de duas alternativas:

- pelo método da invariância da resposta ao impulso
- pelo método da transformação bilinear

Nesta projeção, pretende-se conservar características de resposta em frequência, o que implica projectar o eixo imaginário do plano s sobre a circunferência unitária do plano Z, e pretende-se também conservar características de estabilidade, o que implica projectar polos existentes no semi-plano esquerdo do plano s, no interior da circunferência unitária. Estas projeções são realizadas diferentemente pelos dois métodos que iremos analisar a seguir.

© AJF

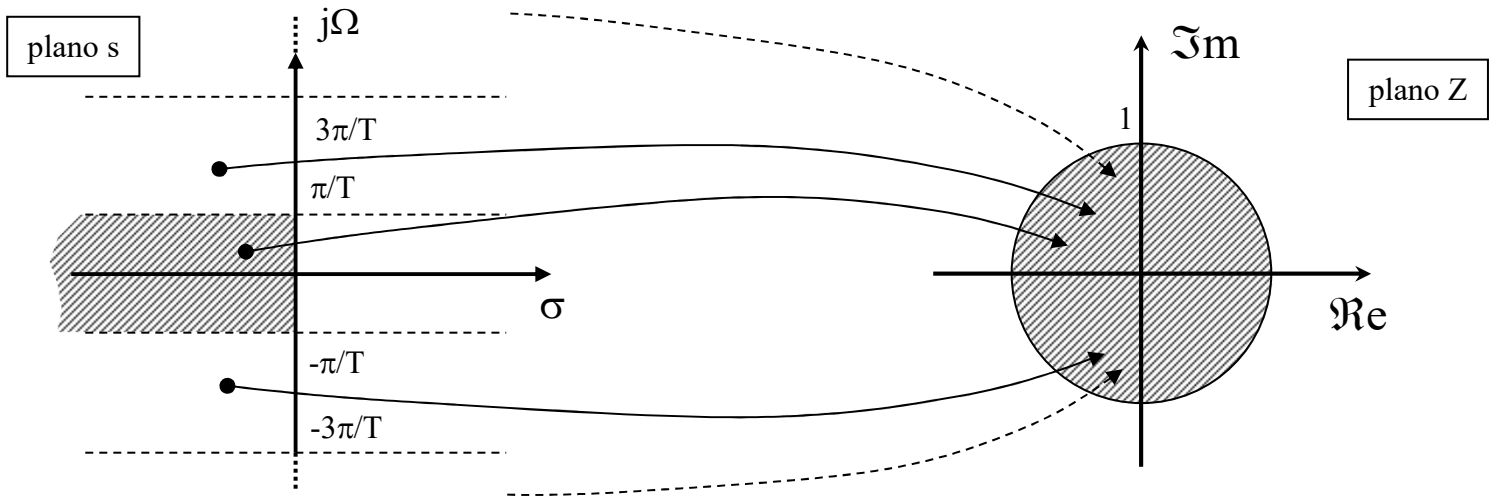
O Método da Invariância ao Impulso

→ consiste em obter um filtro discreto através da amostragem da resposta ao impulso de um filtro contínuo protótipo: $h[n] = Th_c(nT)$

como já foi visto, a correspondência desta operação no domínio das frequências é: $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_c(\frac{\omega - k2\pi}{T})$

e se se verificar $H_c(\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$ ter-se-á a identidade: $H\left(e^{j\omega}\right) = H_c\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| \leq \pi$

A condição anterior é difícil de assegurar na prática pelo que haverá sempre alguma sobreposição de parcelas do somatório (*i.e., aliasing*), o que se traduz na acumulação de projeções de faixas do plano s, no interior da circunferência unitária do plano Z:



© AJF

O Método da Invariância ao Impulso

→ Na prática, de modo a tornar o "aliasing" muito pequeno, o que valida de forma aproximada a identidade anterior, é habitual considerar para o projeto do filtro contínuo protótipo (isto é, filtro analógico protótipo) especificações mais exigentes (para compensar …) do que as que decorrem do estritamente pretendido para a operação do filtro discreto

neste pressuposto, podem-se "mapear" facilmente os polos no plano s relativos ao filtro contínuo, nos correspondentes polos no plano Z e relativos ao filtro discreto, considerando que em ambos os casos as funções de transferência encontram-se decompostas em frações parciais de polos simples:

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k} \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad h_c(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} u(t)$$

e como:

$$h[n] = T h_c(nT) = \sum_{k=1}^{N} T A_k e^{s_k nT} u(nT) \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T A_k}{1 - e^{s_k T} Z^{-1}}$$

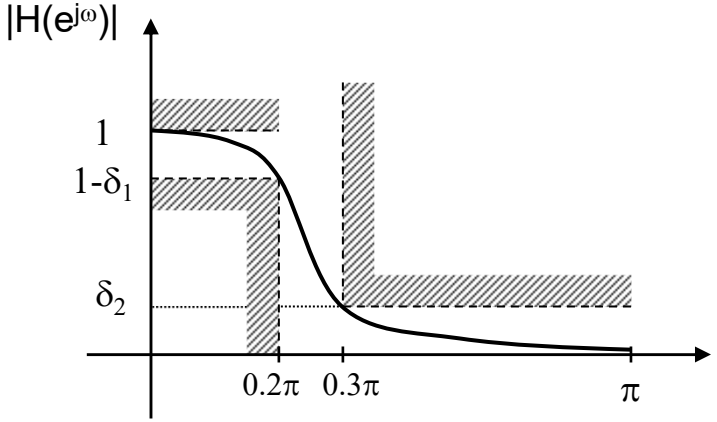
conclui-se facilmente que um polo s_k do plano s é projectado no polo e^{skT} do plano Z, mas esta projeção <u>não é biunívoca</u> pois todos os polos $s_k = \sigma_k + j\left(\Omega_k + \ell \frac{2\pi}{T}\right)$

têm a mesma projeção no plano Z para um qualquer ℓ inteiro.

© AJF

O Método da Invariância ao Impulso

Exemplo: Obter a função de transferência de um filtro discreto do tipo passa-baixo, projectado pelo método da invariância impulsional e a partir de um filtro protótipo de Butterworth, de modo que a atenuação máxima na banda de passagem seja 1.5 dB e a atenuação mínima na banda de corte seja 10 dB. O limite superior da banda passante é $\omega_p=0.2\pi$ e o limite inferior da banda de corte é $\omega_s=0.3\pi$.



Resolução: de acordo com a especificação:

$$\begin{cases} -1.5 \le 20\log(1-\delta_1) \\ -10 \ge 20\log(\delta_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\delta_1 \ge 0.842 \\ \delta_2 \le 0.316 \end{cases}$$

pretendendo-se pois que:

$$\begin{cases} 0.842 \le \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 1, & 0 \le |\omega| \le 0.2\pi \\ \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 0.316, & 0.3\pi \le |\omega| < \pi \end{cases}$$

© AJF

O Método da Invariância ao Impulso

Como no enunciado nada se especifica relativamente ao período de amostragem T, e uma vez que transitar do domínio ω para o domínio Ω do filtro protótipo e novamente para o domínio ω do filtro discreto, tem como efeito cancelar a influência de T [ver Oppenheim, secção 7.1.1], podemos arbitrar um valor, *e.g.* para simplificar T=1, assim temos:

$$\omega_p = \Omega_p T = 0.2\pi$$
$$\omega_s = \Omega_s T = 0.3\pi$$

devendo, portanto, verificar-se (atendendo a que a característica de magnitude de um filtro de Butterworth é monótona decrescente):

$$\begin{cases} |H_c(\Omega_p)| \geq 0.842 \\ |H_c(\Omega_s)| \leq 0.316 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |H_c(\Omega_p)|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} \geq 0.842^2 \\ |H_c(\Omega_s)|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} \leq 0.316^2 \end{cases}$$

o que nos permite, através destas inequações, determinar as duas incógnitas: a frequência de corte Ω_c e a ordem do filtro N.

© AJF

O Método da Invariância ao Impulso

Considerando em primeiro lugar a ordem do filtro:

$$\begin{cases} 1+\left(\dfrac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} \le \dfrac{1}{0.842^2} \\ 1+\left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} \ge \dfrac{1}{0.316^2} \end{cases} \rightarrow \left\{ N \ge \frac{1}{2}\frac{\log\left(\dfrac{\frac{1}{0.316^2}-1}{\frac{1}{0.842^2}-1}\right)}{\log\left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} = 3.81 \rightarrow N = 4 \right.$$

aproxima-se para o inteiro seguinte

Dado que N=4 é uma ordem do filtro superior ao estritamente necessário para satisfazer simultaneamente as duas condições de limite na banda de transição, na determinação agora da frequência de corte do protótipo analógico, Ω_c, resulta que ao satisfazer exactamente uma das condições, a outra condição virá "beneficiada" (*i.e.,* excederá as especificações iniciais):

$$\begin{cases} \Omega_c \ge \dfrac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{\frac{1}{0.842^2}-1}} = 0.224\pi \\ \Omega_c \le \dfrac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{\frac{1}{0.316^2}-1}} = 0.228\pi \end{cases}$$

$\therefore$ beneficia atenuação no início da banda de corte: $10\log\left[\dfrac{1}{1+\left(\frac{0.3\pi}{0.224\pi}\right)^8}\right] = -10.55\,dB$

$\therefore$ beneficia atenuação no fim da banda de passagem: $10\log\left[\dfrac{1}{1+\left(\frac{0.2\pi}{0.228\pi}\right)^8}\right] = -1.31\,dB$

© AJF

O Método da Invariância ao Impulso

De modo a criar uma margem de benefício nas duas condições, e até para compensar de algum modo o "aliasing" resultante da conversão para o filtro discreto, usamos para Ω_c um valor intermédio, *e.g.* $\Omega_c=0.226\pi$ rad/s.

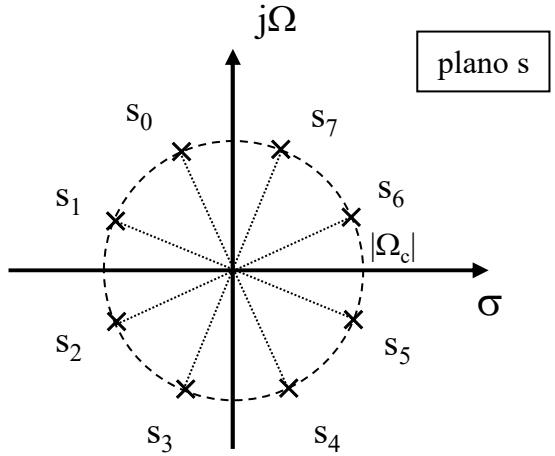
Falta agora identificar os polos do filtro contínuo no plano s e projectá-los no plano Z. Vimos já que os polos de $H_c(s)$ são também polos de $H_c(s)H_c(-s)$:

$$H_c(s)H_c(-s)=\frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

com polos em: $s_k=\Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)}, \quad k=0,\cdots,2N-1$

Sendo N=4 resulta:

$$s_0=\Omega_c e^{j\frac{5\pi}{8}}$$
$$s_1=\Omega_c e^{j\frac{7\pi}{8}}$$
$$s_2=\Omega_c e^{j\frac{9\pi}{8}}$$
$$s_3=\Omega_c e^{j\frac{11\pi}{8}}$$
$$s_4=\Omega_c e^{j\frac{13\pi}{8}}$$
$$s_5=\Omega_c e^{j\frac{15\pi}{8}}$$
$$s_6=\Omega_c e^{j\frac{17\pi}{8}}$$
$$s_7=\Omega_c e^{j\frac{19\pi}{8}}$$



© AJF

O Método da Invariância ao Impulso

Naturalmente, por questões de estabilidade, escolhemos os quatro polos que se situam no semi-plano esquerdo do plano s, isto é: s_0, s_1, s_2 e s_3, resultando:

$$H_c(s) = \frac{g}{(s-s_0)(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$$

com a constante g tal que $H_c(0)=1$, o que implica: $g = s_0 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 = |\Omega_c|^4$

realizando uma decomposição em fracções parciais resultará:

$$H_c(s) = \frac{a_0}{s-s_0} + \frac{a_1}{s-s_1} + \frac{a_2}{s-s_2} + \frac{a_3}{s-s_3}$$

a partir desta função de transferência no domínio de Laplace, e pelo método da invariância da resposta ao impulso, obtemos a função de transferência no domínio Z e relativa ao filtro discreto, projectando os polos simples das fracções parciais:

$$H_c(s) = \sum_{k=0}^{3} \frac{a_k}{s-s_k} \quad \rightarrow \quad H(z) = \sum_{k=0}^{3} \frac{Ta_k}{1-e^{s_k T}Z^{-1}} = \sum_{k=0}^{3} \frac{Ta_k}{1-Z_k Z^{-1}}$$

em que as posições dos polos no plano Z se obtêm facilmente:

$$Z_0 = e^{s_0 T} = e^{\Omega_c T\left(\cos\frac{5\pi}{8} + j\sin\frac{5\pi}{8}\right)} \cong 0.762\, e^{j0.656}$$

$$Z_1 = e^{s_1 T} = e^{\Omega_c T\left(\cos\frac{7\pi}{8} + j\sin\frac{7\pi}{8}\right)} \cong 0.519\, e^{j0.272}$$

$$Z_2 = Z_1^*$$

$$Z_3 = Z_0^*$$

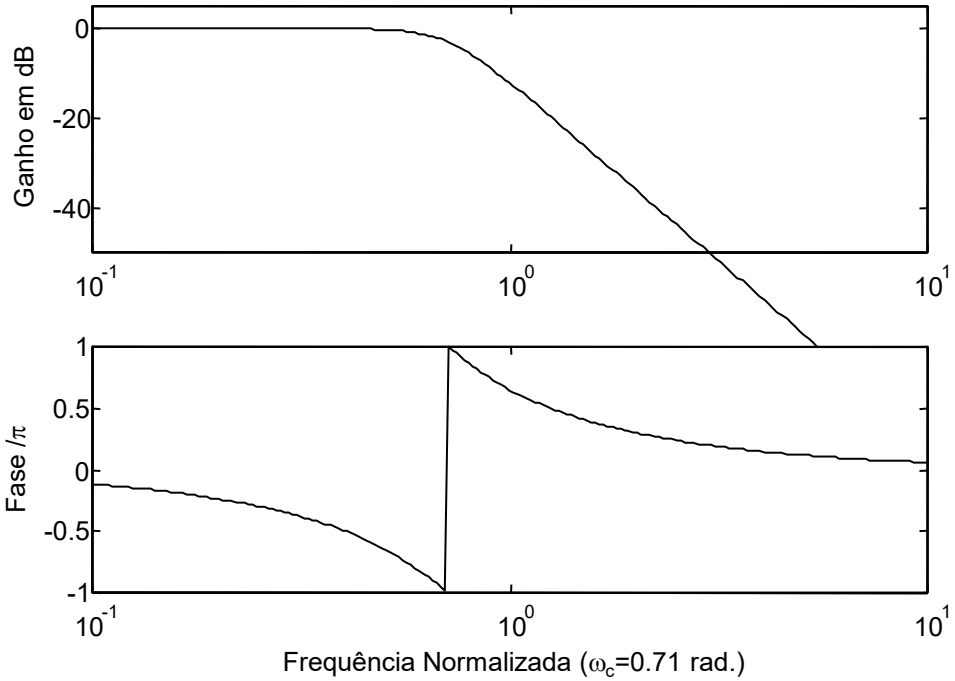
© AJF

O Método da Invariância ao Impulso

Para concluir o exercício, falta calcular os zeros de H(z) e falta ainda confirmar que o filtro discreto satisfaz de facto as especificações. A não se confirmar, dever-se-á retornar a um novo projeto do filtro contínuo, com especificações mais exigentes, por exemplo, aumentando a sua ordem.

Como sugestão para esta análise, propõe-se nos dois 'slides' seguintes o código Matlab que a facilita. Por exemplo, usando o comando Matlab `roots(bz)` permite concluir que os 4 zeros de H(z) situam-se em Z=-0.173, em Z=-2.292, Z=0 (há que fazer primeiro bz=[bz 0] para o representar) e em Z=∞.

Resposta do filtro analógico protótipo



© AJF

O Método da Invariância ao Impulso

- Código Matlab, página 1 de 2 (I.I.)

```
%
% polos do filtro protótipo
%
wc=0.226*pi;
ess0=wc*exp(i*5*pi/8);
ess1=wc*exp(i*7*pi/8);
ess2=wc*exp(i*9*pi/8);
ess3=wc*exp(i*11*pi/8);
%
% Hc(s)=bs/as
%
as=poly([ess0 ess1 ess2 ess3]);
bs=ess0*ess1*ess2*ess3;
%
% Resposta em frequência do filtro protótipo
%
figure(1);
[H,w]=freqs(bs,as);
subplot(2,1,1)
semilogx(w,20*log10(abs(H)));
ylabel('Ganho em dB');
axis([0.1 10 -50 5]);
subplot(2,1,2)
semilogx(w,angle(H)/pi);
ylabel('Fase / PI');
xlabel('Frequência Normalizada (wc=0.71 rad.)');
pause;
%
% decompõe em fracções parciais em s
%
[rs,ps,ks]=residue(bs,as);
```


© AJF

O Método da Invariância ao Impulso

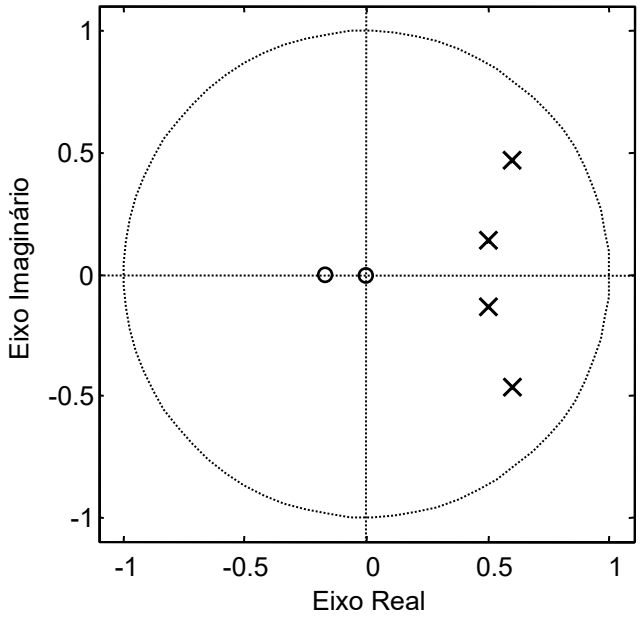
- Código Matlab, página 2 de 2 (I.I.)

```
% projecta fracções parciais de s para z
% NOTA: poderia simplificar-se código
% usando comando "impinvar"
%
rz=rs;
pz=exp(ps);
kz=ks;
[bz,az]=residuez(rz,pz,kz);
%
% diagrama zero-polar
%
figure(2);
zplane(bz,az);
axis([-1.1 1.1 -1.1 1.1]);
%
% Resposta em frequência do filtro discreto
%
[H,W]=freqz(bz,az);
figure(3);
subplot(3,1,1)
plot(W/pi,20*log10(abs(H)));
ylabel('Ganho em dB');
axis([0 1 -50 5]);
subplot(3,1,2)
plot(W/pi,angle(H)/pi);
ylabel('Fase / PI');
subplot(3,1,3)
plot(W/pi,grpdelay(bz,az));
ylabel('T(\omega) (amostras)');
xlabel('Frequência / \pi');
```


© AJF

O Método da Invariância ao Impulso

- Diagrama zero-polar do filtro discreto

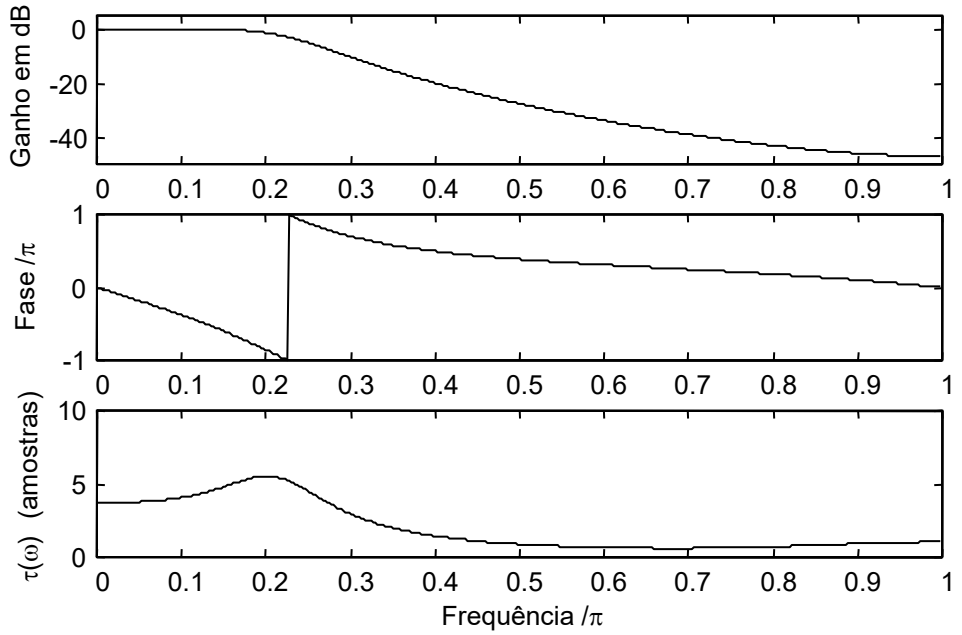


- Resposta do filtro discreto

$|H(e^{j\omega})|$

$\angle H(e^{j\omega})$

$\tau(\omega)$



© AJF

O Método da Invariância ao Impulso

- Notas finais

→ no caso de se querer preservar no filtro discreto um outro tipo de resposta que não a impulsional, por exemplo, a resposta ao degrau (i.e., indicial), dever-se-á projectar aquele com base numa amostragem desta resposta, o que constitui um método alternativo de projeto e igualmente válido: o da invariância da resposta ao degrau.

O filtro discreto resultante será diferente do projectado pelo método da invariância ao impulso.

→ `impinvar()` é o comando Matlab que permite o projeto, pelo método da invariância da reposta ao impulso, de um filtro discreto a partir de um filtro analógico protótipo.

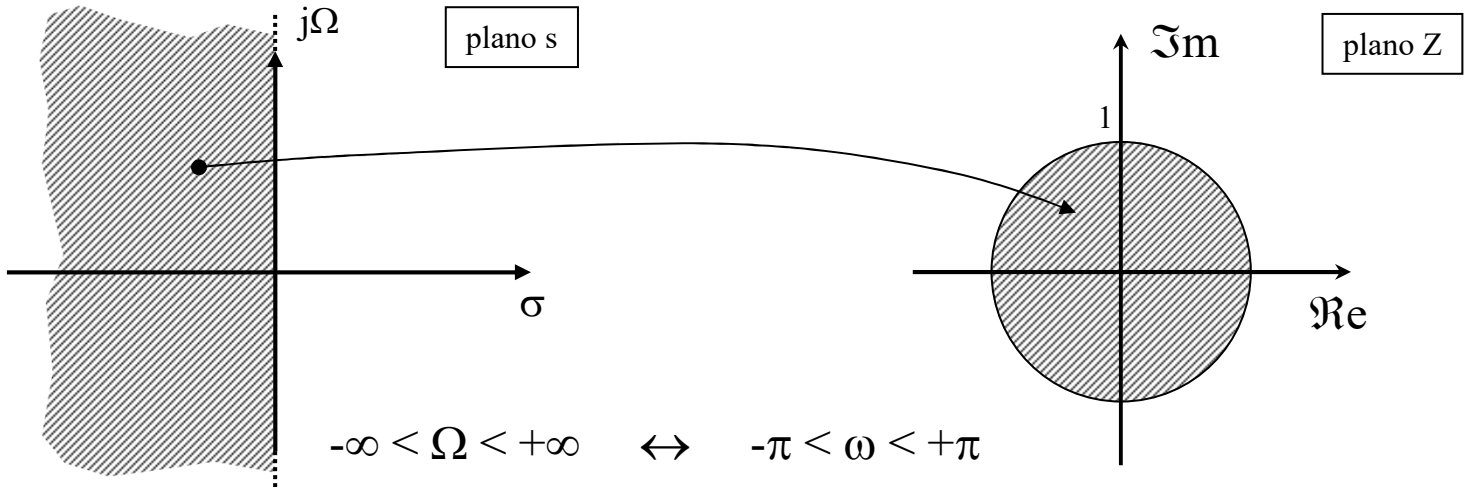
© AJF

O Método da Transformação Bilinear

→ evita o problema de "aliasing" de método anterior efectuando uma transformação algébrica (e não-linear) entre as variáveis s e Z, segundo a qual todo o semi-plano esquerdo do plano s é projectado no interior da circunferência unitária (isto é, no círculo de raio unitário) do plano Z (e em particular, todo o eixo jΩ do plano s é comprimido numa única revolução da circunferência unitária) :

$$s = \frac{2}{T}\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \quad \leftrightarrow \quad Z = \frac{2+sT}{2-sT}$$

e em particular: $$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \leftrightarrow \quad \omega = 2\arctan\frac{\Omega T}{2}$$



© AJF

O Método da Transformação Bilinear

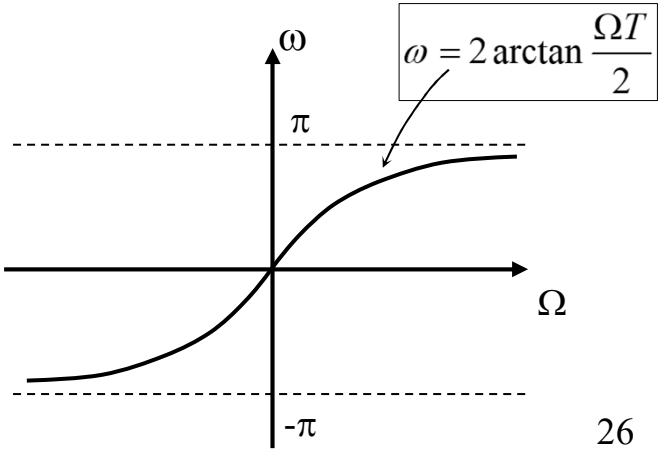
→ Deste modo, a função de transferência do filtro discreto obtém-se facilmente a partir da do filtro analógico protótipo:

$$H(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}}$$

- **NOTA 1**: este "mapeamento" faz com que filtros analógicos causais e estáveis sejam convertidos em filtros discretos também causais e estáveis, tal como se sugere na ilustração do 'slide' anterior.

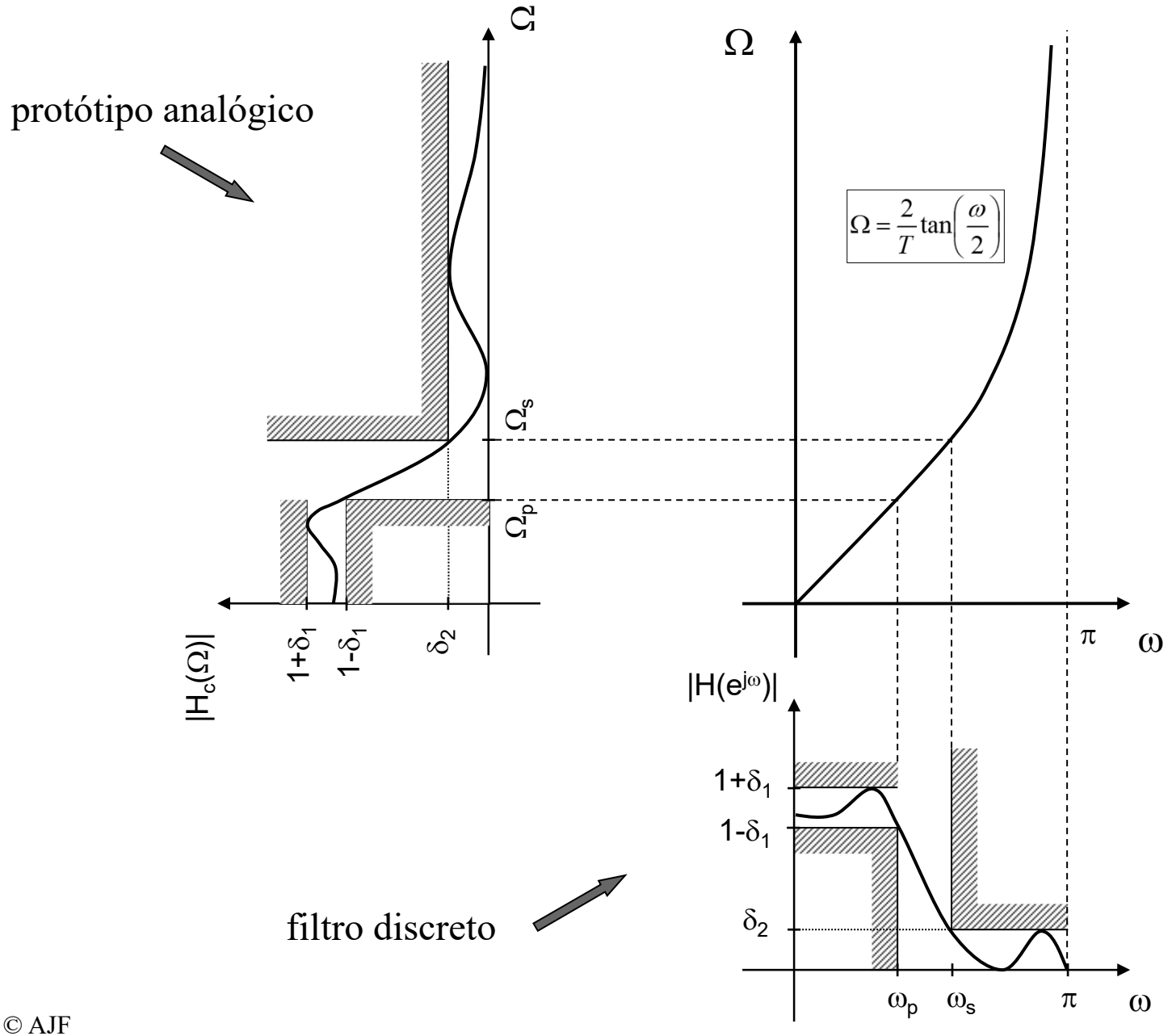
- **NOTA 2**: tal como já acontecia para o método da invariância impulsional, se as especificações para a operação do filtro discreto forem dadas para este domínio, então a sua transposição para o domínio em s do filtro analógico protótipo, e a posterior projeção das deste no domínio Z do filtro discreto, faz com que o valor da constante T seja irrelevante, podendo considerar-se unitário para simplificar.

- **NOTA 3**: a expressão de passagem entre Ω e ω revela que há uma compressão não-linear de um eixo sobre o outro, o que deverá ser considerado na transposição de características entre o filtro discreto e o filtro protótipo, como se ilustra no 'slide' seguinte.



© AJF

O Método da Transformação Bilinear



© AJF

O Método da Transformação Bilinear

→ Como se infere a partir da ilustração do 'slide' anterior, se as especificações do filtro são já relativas à operação do filtro discreto, estão devem em primeiro lugar ser projectadas do domínio ω para o domínio Ω (*i.e.,* "prewarped") acautelando a distorção não-linear, de modo que ao transpor $H_c(s)$ para $H(z)$ se verifiquem as especificações.

→ Apesar do problema da compressão não-linear de frequências, que impede por exemplo que um filtro diferenciador contínuo (cuja magnitude da resposta em frequência é linear em frequência) se projecte num filtro diferenciador discreto, o método da transformação bilinear é mais flexível do que o da invariância da resposta ao impulso, porque permite aproximações a filtros do tipo passa-alto, passa-baixo e passa-banda. Por exemplo, dado que os filtros contínuos passa-alto não são limitados em banda, não é possível usar a invariância ao impulso para projectar este tipo de filtros.

→ Contudo, apesar de limitado, o método da invariância da resposta ao impulso permite uma transposição "mais linear" das características de magnitude e fase do filtro analógico protótipo para as do filtro discreto.

© AJF

O Método da Transformação Bilinear

Exemplo: Considerando os mesmos dados do exemplo anterior mas pretendendo-se usar o método da transformação bilinear, há em primeiro lugar que antecipar o efeito da compressão de frequências:

$$\begin{cases} \Omega_p = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) \\ \Omega_s = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Omega_p = 2\tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right) = 0.65\,rad. \\ \Omega_s = 2\tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) = 1.02\,rad. \end{cases}$$

admite-se para simplificar T=1

reutilizando parte dos cálculos já efectuados no exercício anterior, conclui-se que para as novas frequências da banda transição, a ordem do filtro protótipo virá:

$$N \geq \frac{1}{2}\frac{\log\left(\frac{\frac{1}{0.316^2}-1}{\frac{1}{0.842^2}-1}\right)}{\log\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} = 3.43 \rightarrow N = 4$$

com base em N=4, satisfazendo exatamente a condição na banda de passagem e de corte, ter-se-á respetivamente para a frequência de corte do filtro:

$$\begin{cases} \Omega_c \geq \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{\frac{1}{0.842^2}-1}} = 0.727\,rad. \rightarrow \text{a especificação na banda de corte será excedida} \\ \Omega_c \leq \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{\frac{1}{0.316^2}-1}} = 0.775\,rad. \rightarrow \text{a especificação na banda de passagem será excedida} \end{cases}$$

© AJF

O Método da Transformação Bilinear

Apesar de não haver, com este método, problemas de "aliasing", podemos, ainda assim, escolher um valor intermédio, por exemplo: Ω_c=0.75 radianos.

Tal como procedemos no exemplo anterior, deduz-se $H_c(s)$ a partir da constelação de polos de $H_c(s)H_c(-s)$:

$$H_c(s) = \frac{\Omega_c^4}{(s-s_0)(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$$

aplicando a transformação bilinear obtém-se:

$$H(z) = H_c\left(\frac{2}{T}\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}\right) = \frac{T^4\left(1+Z^{-1}\right)^4\Omega_c^4}{(2-s_oT)(2-s_1T)(2-s_2T)(2-s_3T)} \cdot \frac{1}{(1-Z_0Z^{-1})(1-Z_1Z^{-1})(1-Z_2Z^{-1})(1-Z_3Z^{-1})}$$

com: $Z_0 = \frac{2+s_0T}{2-s_0T}$, $Z_1 = \frac{2+s_1T}{2-s_1T}$, $Z_2 = \frac{2+s_2T}{2-s_2T}$, $Z_3 = \frac{2+s_3T}{2-s_3T}$

Este resultado revela uma característica dos filtros de Butterworth assim projectados: possuem tantos zeros em Z=-1 quanto a ordem do filtro (ou quantos os zeros em s=∞, do filtro analógico protótipo).

© AJF

O Método da Transformação Bilinear

Tal como no exemplo anterior, também se apresenta aqui o código Matlab que produz os resultados expostos a seguir, permitindo a sua reprodução mas também outras explorações.

•Código Matlab, página 1 de 2 (T.B.)

```
%
% polos do filtro protótipo
%
wc=0.75; % já inclui compressão de frequência
ess0=wc*exp(i*5*pi/8);
ess1=wc*exp(i*7*pi/8);
ess2=wc*exp(i*9*pi/8);
ess3=wc*exp(i*11*pi/8);
%
% Hc(s)=bs/as
%
as=poly([ess0 ess1 ess2 ess3]);
bs=ess0*ess1*ess2*ess3;
%
% Resposta em frequência do filtro protótipo
%
figure(1);
[H,W]=freqs(bs,as);
subplot(2,1,1)
semilogx(W,20*log10(abs(H)));
ylabel('Ganho em dB');
axis([0.1 10 -50 5]);
subplot(2,1,2)
semilogx(W,angle(H)/pi);
ylabel('Fase / PI');
xlabel('Frequência Normalizada (wc=0.75 rad.)');
```


© AJF

O Método da Transformação Bilinear

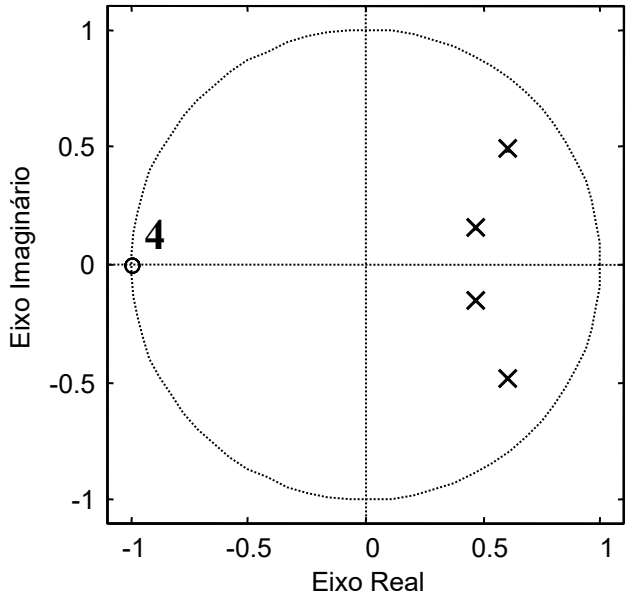
•Código Matlab, página 2 de 2 (T.B.)

```
%
% aplica transformação bilinear
%
[bz,az]=bilinear(bs,as,1);
%
% diagrama zero-polar
%
figure(2);
zplane(bz,az);
axis([-1.1 1.1 -1.1 1.1]);
%
% Resposta em frequência do filtro discreto
%
[H,W]=freqz(bz,az);
figure(3);
subplot(3,1,1)
plot(W/pi,20*log10(abs(H)));
ylabel('Ganho em dB');
axis([0 1 -50 5]);
subplot(3,1,2)
plot(W/pi,angle(H)/pi);
ylabel('Fase / PI');
subplot(3,1,3)
plot(W/pi,grpdelay(bz,az));
ylabel('T(\omega) (amostras)');
xlabel('Frequência / \pi');
```


© AJF

O Método da Transformação Bilinear

- Diagrama zero-polar do filtro discreto

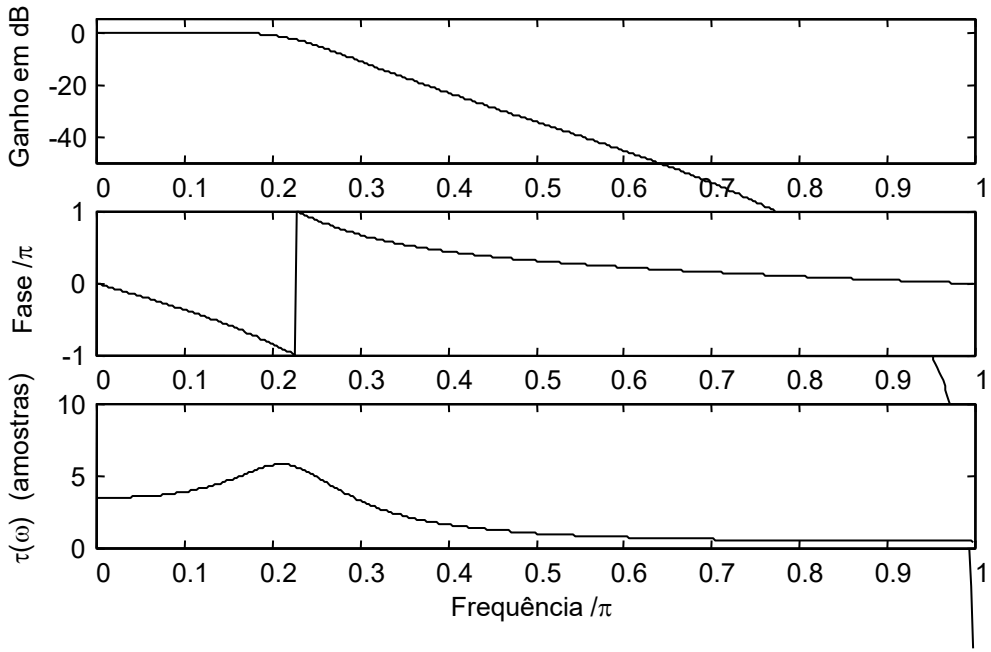


- Resposta do filtro discreto

$|H(e^{j\omega})|$

$\angle H(e^{j\omega})$

$\tau(\omega)$



© AJF

O Método da Transformação Bilinear

- Notas finais

→ apesar da frequência de corte do filtro analógico ser aqui Ω_c=0.75 radianos (era 0.71 radianos no exemplo do método da invariância impulsional) as suas características de magnitude e fase são muito semelhantes às apresentadas no 'slide' nº 23 desta aula

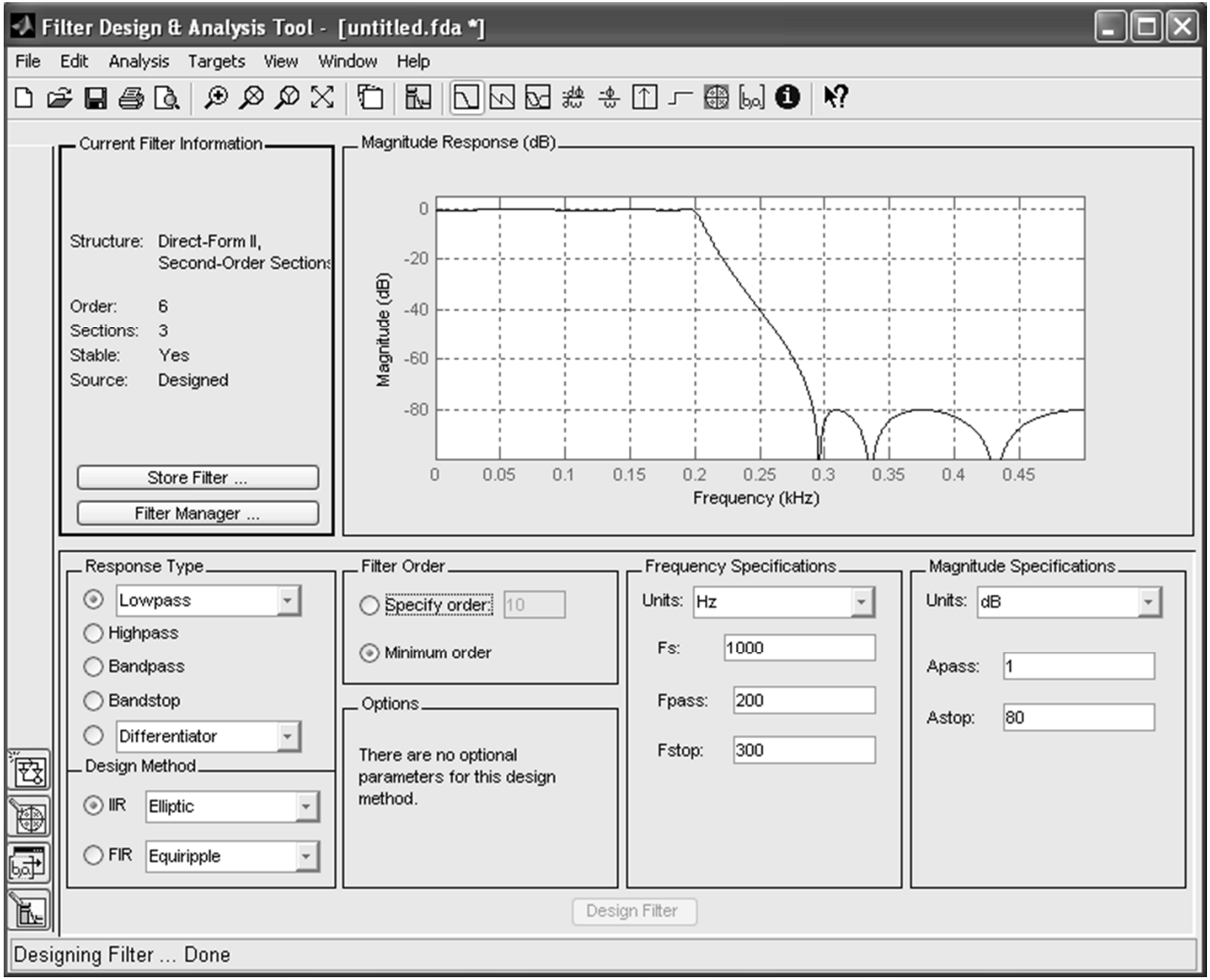
→ como se infere a partir da representação do atraso de grupo, a maior distorção de fase ocorre na vizinhança das bandas de transição, o que é um aspecto típico no comportamento dos filtros

→ confrontando estes resultados com os já obtidos no caso de se usar o método da invariância da resposta ao impulso, é claro neste exemplo que o zero múltiplo em Z=-1 dá origem a uma descida muito mais acentuada da curva de magnitude.

→ `Bilinear()` é o comando Matlab que permite o projeto, pelo método da transformação bilinear, de um filtro discreto a partir de um filtro analógico protótipo

© AJF

O Método da Transformação Bilinear



© AJF